Table des matières

Introduction

Les groupoïdes sont des structures capables de décrire des propriétés de symétrie de manière plus générale que celles décrites par les groupes [17]. Ils ont été introduits par H. Brandt en 1926 dans [1]. Sa définition venait de son travail sur la généralisation de la composition de formes quadratiques binaires aux formes quadratiques quaternaires. Brandt a alors vu comment utiliser la notion de groupoïde pour généraliser l'arithmétique des idéaux d'anneaux d'entiers algébriques au cas non-commutatif en remplaçant le groupe abélien fini classique par un groupoïde fini [2]. Cette structure reçut plus d'attention après l'invention des catégories. En effet, un groupoïde est une (petite) catégorie dont toutes les flèches sont inversibles [3]. La définition de Brandt fut ainsi retravaillée par de nombreux mathématiciens pour arriver à la définition que nous présentons dans ce travail. Par la suite, l'utilisation des groupoïdes a été étendue de manière significative, dans les années 1950 par C. Ehressmann, qui a considéré les groupoïdes dans le cadre des variétés différentiables. Avec le temps, ces derniers sont devenus un outil très important de la géométrie différentielle notamment pour la classification d'espaces trop singuliers pour être des variétés [3]. Dans ce cas, nous sommes amenés à considérer avec beaucoup d'intérêt les groupoïdes différentiables, appelés aussi groupoïdes de Lie.

D'un autre côté, la géométrie riemannienne a été d'un grand support pour la géométrie différentielle. Munir une variété d'une métrique riemannienne permet de l'enrichir et d'y définir la notion de longueur, d'angle, etc. On étend alors les méthodes de la géométrie analytique en utilisant des coordonnées locales pour effectuer l'étude d'espaces dits courbes. Une métrique riemannienne nous permet aussi d'avoir sur une variété des propriétés que l'on retrouve généralement dans les espaces euclidiens telles que la notion d'orthogonalité, par exemple. Les concepts les plus notables de la géométrie riemannienne sont la courbure de l'espace étudié et les géodésiques, courbes résolvant un problème de plus court chemin sur cet espace. Toutefois, comme notre approche de la géométrie riemannienne va rester très élémentaire tout au long de ce travail, nous n'allons pas aborder ses notions. La géométrie riemannienne peut aussi être d'un grand support dans divers domaines des mathématiques tels que la théorie géométrique des groupes, un domaine très actif qui puise dedans beaucoup de ses idées [10].

Le but de ce travail est de définir sur un groupoïde une métrique riemannienne en s'inspirant principalement des travaux de R. L. Fernandes et M. L. Del Hoyo dans [5]. Bien avant cela, des mathématiciens tels que E. Gallego, L. Gualandri, G. Hector et A. Reventós ont déjà entrepris de donner une telle définition dans [8], mais elle manque de prendre en compte toute la structure du groupoïde en ignorant un élément clé. C'est avec cette motivation que nous allons voir comment arriver à définir ce qu'on appellera par la suite un groupoïde riemannien.

Au premier chapitre, nous commencerons par aborder de manière très générale la notion de métrique riemannienne, nous démontrerons qu'on peut toujours en définir une sur n'importe quelle variété différentiable. Grâce à cette métrique, on sera en mesure de parler d'orthogonalité et d'isométrie, notions indispensables afin d'aborder les submersions dites riemanniennes. Le rôle de ces dernières sera non-négligeable dans les prochains chapitres étant donné que les applications structurelles d'un groupoïde de Lie sont des submersions. Le chapitre se conclue par la définition d'une métrique riemannienne sur les groupes de Lie qui prend en compte la structure de groupe. Cette définition nous permettra d'établir par la suite une comparaison avec les métriques que l'on définira dans le cadre des groupoïdes de Lie.

Au second chapitre, on définira les groupoïdes et on démontrera certaines propriétés de base qu'ils vérifient avant d'aborder les groupoïdes de Lie. La notion d'action d'un groupoïde sur un ensemble sera omniprésente dans cette partie du travail. En particulier, on fera agir un groupoïde de Lie sur une variété différentiable.

Au dernier chapitre, on donne d'abord un sens au fait qu'une métrique sur une variété différentiable soit invariante sous l'action d'un groupoïde de Lie. La suite du chapitre se concentrera exclusivement sur la définition des métriques riemanniennes sur un groupoïde de Lie qui prendra en compte toute sa structure.

1
Métriques riemanniennes

Après un bref rappel de ce qu'est une variété riemannienne, nous définissons les outils dont nous aurons besoin tout au long de ce travail tels que les submersions riemanniennes. Dans la dernière partie du chapitre, on s'intéresse au cas particulier de métrique riemmannienne sur un groupe de Lie.

1.1 Variétés riemanniennes

Définition 1.1.1. Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Une **métrique riemannienne** sur la variété M est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, $g : M \to \mathcal{T}^2(M)$ de la variété M dans l'ensemble $\mathcal{T}^2(M)$ des champs de 2-tenseurs covariants, qui à tout point $p \in M$ associe un produit scalaire $g_p = g(p)$ sur T_pM.
Le couple (M, g) est alors appelé **variété riemannienne**.

Exemple 1. L'application $\overline{g} : p \longmapsto \overline{g}_p$ définie sur $\mathbb{R}^n$, qui associe à tout point $p \in \mathbb{R}^n$, par identification de $T_p\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire

$$\begin{array}{cccc} \overline{g}_p & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (u, v) & \longmapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} u_k v_k \end{array}$$

est une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^n$ appelée métrique euclidienne.
De là, on déduit que toute sous-variété S de $\mathbb{R}^n$ peut être munie d'une métrique par restriction de la métrique euclidienne à S.

Théorème 1.1.1 (Existence de métriques riemanniennes)**.** *Toute variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ admet une métrique riemannienne.*

Démonstration.
Soit $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ une famille de cartes de la variété M telle que

1. $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = M$;
2. Tout point $p \in M$ possède un voisinage V tel que $V \cap U_i \neq \varnothing$ pour au plus un nombre fini d'indices.

Pour tout $i \in I$, on peut définir une métrique riemannienne g^i sur U_i à partir de la métrique euclidienne $\overline{g}$ en posant pour tout $p \in U_i$ et tous $u, v \in T_pM$,

$$g_p^i(u,v) = \overline{g}_{\varphi_i(p)}(T_p\varphi_i(u), T_p\varphi_i(v)).$$

Soit $(\psi_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de M dans $[0,1]$ et $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de M telle que

i. Pour tout $i \in I$, $\overline{O}_i \subset U_i$;

ii. $\underset{i\in I}{O_i} = M$;

iii. Pour tout $i \in I$, $\psi_i = 0$ sur le complémentaire de $\overline{O}_i$ dans M ;

iv. Pour tout $p \in M$, $\sum\limits_{i\in I} \psi_i(p) = 1$.

Posons alors pour tout $p \in M$ et tous $u, v \in T_pM$,

$$g_p(u,v) = \sum_{i\in I} \psi_i(p) g_p^i(u,v). \tag{1.1}$$

Si $p \in U_i$, alors le $i^{\text{ième}}$ terme $\psi_i(p)g_p^i(u,v)$ est bien défini. Sinon, comme $\psi_i(p) = 0$, alors $\psi_i(p)g_p^i(u,v) = 0$. De plus, d'après la condition 2, la somme 1.1 a un nombre fini de termes non nuls dans un voisinage de tout point $p \in M$, donc elle définit bien une forme bilinéaire.
Puis, comme pour tout $i \in I$, g_p^i est symétrique, il en est de même pour g_p. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'elle est définie positive. On a

$$g_p(u,u) = \sum_{i\in I} \psi_i(p) g_p^i(u,u). \tag{1.2}$$

Comme chaque terme de la somme (1.2) est positif, elle est bien positive. De plus, comme $\sum\limits_{i\in I} \psi_i(p) = 1$, alors la somme (1.2) pour $u \neq 0$ est non nulle, car il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $\psi_{i_0}(p) \neq 0$. ✠

Grâce aux métriques riemanniennes, on peut définir sur une variété M les notions de base que l'on retrouve sur les espaces euclidiens telles que les angles, une norme sur l'espace tangent T_pM pour $p \in M$, etc. Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse particulièrement à la notion d'orthogonalité et d'isométrie. Ce sont ces deux notions que l'on va expliciter dans les définitions qui vont suivre.

Définition 1.1.2. Soit (M, g) une variété riemannienne.

i. Pour $p \in M$, on dit que le vecteur tangent $u \in T_pM$ est **orthogonal** au vecteur tangent $v \in T_pM$ si $g_p(u,v) = 0$;

ii. Pour $S \subset M$ une sous-variété de M et $p \in S$, l'ensemble

$$N_pS = \{v \in T_pM \,|\, \forall u \in T_pS, g_p(u,v) = 0\}$$

est l'ensemble des vecteurs de T_pM qui sont orthogonaux aux vecteurs de T_pS, c'est un sous-espace vectoriel supplémentaire de T_pS appelé **espace normal** à la sous-variété S au point p.

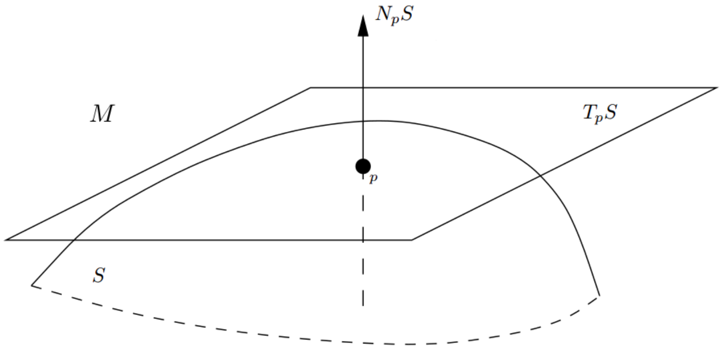


FIGURE 1.1 – L'espace normal en p.

Remarque. Si (M,g) est une variété riemannienne et si S et P sont deux sous-variétés de M telles que $S \subset P$, alors $N_pP \subset N_pS$, pour tout $p \in S$.

Proposition 1.1.1. *Soit (M,g) une variété riemannienne et $S \subset M$ une sous-variété de M. Posons $NS = \{(p, v_p) \in TM \,|\, p \in S \text{ et } v_p \in N_pS\}$. Alors NS est une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Preuve. Posons $n = \dim M$ et $m = \dim S$.
Soit $(Y^1, \cdots, Y^n)$ une famille de champs de vecteurs définis sur un ouvert U de M telle que

i. Pour tout $p \in U$, $(Y_p^1, \cdots, Y_p^n)$ est une base orthonormée de T_pM. C'est-à-dire que pour tous $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $\begin{cases} g_p(Y_p^i, Y_p^j) = 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ g_p(Y_p^i, Y_p^j) = 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$;

ii. Pour tout $p \in S \cap U$, la famille $(Y_p^1, \cdots, Y_p^m)$ est une base de T_pS.

Une telle famille existe d'après [14] (Voir problème 3-1).
Par la suite, notons $\pi : TM \to M$ la projection canonique et définissons l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \pi_{|NS}^{-1}(S \cap U) & \longrightarrow & (S \cap U) \times \mathbb{R}^{n-m} \\ & & \left(p, \sum\limits_{i=m+1}^{n} a_i Y_p^i\right) & \longmapsto & (p, (a_{m+1}, \cdots, a_n)). \end{array}$$

Comme la famille $(Y_p^{m+1}, \cdots, Y_p^n)$ est une base de N_pS, alors Φ est bijective. De cette façon, on peut voir $\left(\pi_{|NS}^{-1}(S \cap U), \Phi\right)$ comme une carte de NS.
Ensuite, considérons une autre famille $(Z^1, \cdots, Z^n)$ de champs de vecteurs définis sur un autre ouvert V de M vérifiant les mêmes conditions i. et ii. ci-dessus. Ainsi, qu'une autre bijection Ψ définie sur $\pi_{|NS}^{-1}(S \cap V)$ de la même façon que Φ.
On sait alors que pour tout $p \in U \cap V$ et tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, il existe une matrice $A^{(p)}$ telle que

$$Y_p^i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{(p)} Z_p^j.$$

Donc pour tout $p \in S \cap U \cap V$, on a

$$\Psi \circ \Phi^{-1}\left(p, (a_{m+1}, \cdots, a_n)\right) = \left(p, \left(\sum_{i=m+1}^{n} A^{(p)}_{i\,(m+1)}\, a_i, \cdots, \sum_{i=m+1}^{n} A^{(p)}_{i\,n}\, a_i\right)\right)$$

qui est un difféomorphisme.
Ce qui rend les cartes $\left(\pi^{-1}_{|NS}(S \cap U), \Phi\right)$ et $\left(\pi^{-1}_{|NS}(S \cap V), \Psi\right)$ compatibles et nous permet de conclure que NS est une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$. ✠

Définition 1.1.3. La variété NS donnée à la proposition 1.1.1 est appelée **fibré normal** de S.

Définition 1.1.4. Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes et $f : M \to N$ un difféomorphisme. On dit que f est une **isométrie** si pour tout $p \in M$, l'isomorphisme $T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ est une isométrie. C'est-à-dire que, pour tout $p \in M$ et tous $u, v \in T_pM$,

$$h_{f(p)}\left(T_pf(u), T_pf(v)\right) = g_p(u, v).$$

1.2 Submersions riemanniennes

Commençons par énoncer le résultat suivant qui est immédiat.

Lemme 1.2.1. *Soient M et B deux variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\pi : M \to B$ une submersion. Soit $p \in M$ et soit H_p un sous-espace de T_pM supplémentaire à $\ker(T_p\pi)$. Alors H_p est isomorphe à $T_{\pi(p)}B$.*

Rappelons que si $\pi : M \to B$ est une submersion, alors pour tout $p \in M$, l'ensemble $\pi^{-1}(\{\pi(p)\})$ est une sous-variété de M et on a $T_p\pi^{-1}(\{\pi(p)\}) = \ker(T_p\pi)$.

Ensuite, remarquons qu'en général il n'existe pas de choix naturel du supplémentaire H_p dans le lemme ci-dessus. Cependant, lorsqu'on est dans le cas des variétés riemanniennes, on peut choisir le supplémentaire orthogonal de $\ker(T_p\pi)$ dans T_pM qui n'est autre que l'espace normal $N_p\pi^{-1}(\{\pi(p)\})$ que l'on notera plus simplement $\mathcal{H}^g_p$.

Définition 1.2.1. Soient (M, g) et (B, h) deux variétés riemanniennes et $\pi : M \to B$ une submersion. On dit que π est une **submersion riemannienne** si pour tout $p \in M$, l'application $T_p\pi_{|\mathcal{H}^g_p} : \mathcal{H}^g_p \to T_{\pi(p)}B$ est une isométrie. C'est-à-dire que, pour tout $p \in M$ et tous $u, v \in \mathcal{H}^g_p$,

$$h_{\pi(p)}\left(T_p\pi(u), T_p\pi(v)\right) = g_p(u, v).$$

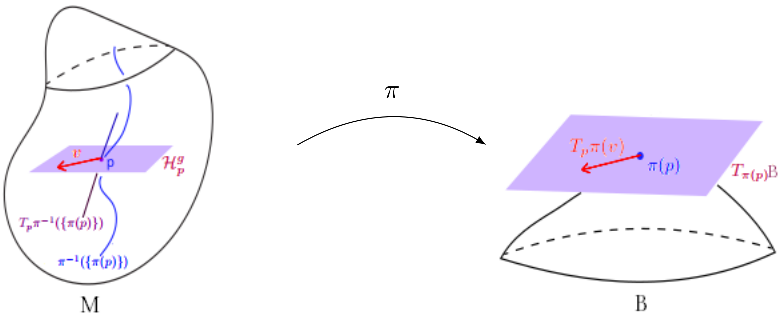


FIGURE 1.2 – Illustration d'une submersion riemannienne.

Exemple 2. Soit (M, g) une variété riemannienne. Considérons sur $M \times M$ la **métrique produit** définie pour tout $(p, q) \in M \times M$ et tous $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in T_pM \times T_qM$ par

$$\tilde{g}_{(p,q)}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = g_p(u_1, v_1) + g_q(u_2, v_2).$$

Montrons alors que la première projection $\pi_1 : M \times M \to M$ est une submersion riemannienne.

Pour commencer, on a

$$\ker(T_{(p,q)}\pi_1) = \{0\} \times T_qM$$

qui est isomorphe à T_qM. Ainsi,

$$N_{(p,q)}\pi_1^{-1}(\{p\}) = T_pM \times \{0\}.$$

Soient maintenant $(p, q) \in M \times M$ et $u, v \in T_pM$. On a

$$g_p(T_{(p,q)}\pi_1(u, 0), T_{(p,q)}\pi_1(v, 0)) = g_p(u, v)$$

et

$$\tilde{g}_{(p,q)}((u, 0), (v, 0)) = g_p(u, v) + g_q(0, 0) = g_p(u, v),$$

d'où le résultat.

De la même manière, on montre que la seconde projection est aussi une submersion riemannienne.

On va voir qu'étant donnée une submersion $\pi : M \to B$ et une métrique sur la variété M, on peut définir une métrique riemannienne sur la variété d'arrivée B à partir de celle de la variété de départ M de sorte que la submersion π soit riemannienne.

Définition 1.2.2. Soient (M, g) une variété riemannienne, B une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\pi : M \to B$ une submersion. On dit que la métrique g sur M est **π-transverse** si pour tous $p, q \in M$ tels que $\pi(p) = \pi(q)$, la composition

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_p^g \arrow[rr, "T_q\pi_{|\mathcal{H}_q^g}^{-1} \circ T_p\pi_{|\mathcal{H}_p^g}"] \arrow[dr, "T_p\pi_{|\mathcal{H}_p^g}"'] & & \mathcal{H}_q^g \arrow[dl, "T_q\pi_{|\mathcal{H}_q^g}"] \\
& T_{\pi(p)}B = T_{\pi(q)}B &
\end{tikzcd}$$

est une isométrie. C'est-à-dire que pour tous $u_p, v_p \in \mathcal{H}_p^g$ et tous $u_q, v_q \in \mathcal{H}_q^g$ tels que $T_p\pi(u_p) = T_q\pi(u_q)$ et $T_p\pi(v_p) = T_q\pi(v_q)$,

$$g_q(u_q, v_q) = g_p(u_p, v_p).$$

Exemple 3. Soit G un groupe de Lie agissant sur une variété riemannienne (M, g) par une action notée θ telle que pour tout $x \in G$, le difféomorphisme $\theta_x : M \to M$, $p \mapsto x \cdot p$ est une isométrie.
Supposons de plus que l'action θ soit propre et libre. Dans ce cas, l'espace des orbites M/G possède donc une structure de variété qui fait de la surjection canonique $\pi : M \to M/G$ une submersion [15].
La métrique g est π-transverse. En effet, soient $p, q \in M$ tels que $\pi(p) = \pi(q)$ et $u_p, v_p \in \mathcal{H}_p^g$ et $u_q, v_q \in \mathcal{H}_q^g$ tels que $T_p\pi(u_p) = T_q\pi(u_q)$ et $T_p\pi(v_p) = T_q\pi(v_q)$.
Comme $\pi(p) = \pi(q)$, alors il existe $x \in G$ tel que $q = \theta(x, p)$.
De plus, comme $T_p\theta_{x|\mathcal{H}_p^g} : \mathcal{H}_p^g \to \mathcal{H}_q^g$ est une isométrie, alors,

$$g_q(T_p\theta_x(u_p), T_p\theta_x(v_p)) = g_p(u_p, v_p).$$

Il reste à montrer que $T_p\theta_x(u_p) = u_q$ et que $T_p\theta_x(v_p) = v_q$.
Comme $T_p\theta_{x|\mathcal{H}_p^g} : \mathcal{H}_p^g \to \mathcal{H}_q^g$ est un isomorphisme, il existe alors un unique vecteur u'_p tel que $u_q = T_p\theta_x(u'_p)$. Or $\pi \circ \theta_x = \pi$, ainsi

$$T_q\pi(u_q) = T_p(\pi \circ \theta_x)(u'_p) = T_p\pi(u'_p).$$

Mais $T_q\pi(u_q) = T_p\pi(u_p)$, par conséquent

$$T_p\pi(u_p) = T_q\pi(u'_p)$$

Le fait que $T_p\pi_{|\mathcal{H}_p^g} : \mathcal{H}_p^g \to T_{\pi(p)}(M/G)$ est un isomorphisme implique que $u_p = u'_p$, d'où $T_p\theta_x(u_p) = u_q$.
De la même manière, on montre que $T_p\theta_x(v_p) = v_q$.

Proposition 1.2.1. *Soient (M, g) une variété riemannienne, B une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\pi : M \to B$ une submersion. Si la métrique riemannienne g est π-transverse, alors il existe une unique métrique riemannienne h sur B telle que π soit une submersion riemannienne.*

Preuve. Soient $p \in M$ et $w, z \in T_{\pi(p)}B$.
Comme $T_p\pi_{|\mathcal{H}_p^g}$ est un isomorphisme, il existe deux uniques vecteurs $u, v \in \mathcal{H}_p^g$ tels que $w = T_p\pi(u)$ et $z = T_p\pi(v)$. Posons alors

$$h_{\pi(p)}(w, z) = g_p(u, v). \tag{1.3}$$

Cette application est bien définie car $h_{\pi(p)}$ ne dépend pas de p puisque la métrique riemannienne g est π-transverse.
Ensuite, l'application h définit bien une métrique riemannienne sur la variété B, cela provient du fait que g est une métrique riemannienne sur M.
Enfin, il est immédiat que cette métrique est unique. ✠

Grâce à la proposition 1.2.1, on est en mesure d'affirmer que se donner une submersion riemannienne et une métrique sur la variété de départ transverse à celle-ci permet de trouver une métrique très particulière sur la variété d'arrivée. Il est aussi aisé de voir que, réciproquement, si on se donne une métrique pour la variété de départ transverse à une submersion et la métrique 1.3 sur la variété de d'arrivée, alors la submersion en question est riemannienne. En considérant donc ces deux métriques riemanniennes, on peut rendre riemannienne n'importe quelle submersion. Remarquons que cela est rendu possible grâce à la donnée d'une métrique transverse à la submersion.

Proposition 1.2.2. *Soient M et B deux variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\pi : M \to B$ une submersion. Il existe alors une métrique riemannienne π-transverse sur M.*

Preuve. Voir les références [5] et [18]. ✠

Remarque. À l'aide des propositions 1.2.1 et 1.2.2, on conclue que si on se donne une submersion $\pi : M \to B$, une métrique riemannienne g sur M, alors

$$\left.\begin{array}{r} g \text{ est } \pi\text{-transverse, et} \\ h \text{ est une métrique sur B vérifiant } 1.3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \pi \text{ est une submersion riemannienne.}$$

Proposition 1.2.3. *Soient M, B et R trois variétés, $\pi : M \to B$ une submersion et $\tau : R \to M$ une submersion surjective. Soit η une métrique riemannienne τ-transverse sur R. Alors η est $(\pi \circ \tau)$-transverse si, et seulement si, la métrique riemannienne g définie sur M pour tout $a \in R$ et tous $u, v \in \mathcal{H}_a^\eta$ par*

$$g_{\tau(a)}\left(T_a\tau(u), T_a\tau(v)\right) = \eta_a(u, v)$$

est π-transverse.

Preuve.
$(\Longrightarrow)$ Soient $p, q \in M$ tels que $\pi(p) = \pi(q)$ et u_p et $v_p \in \mathcal{H}_p^g$ et u_q et $v_q \in \mathcal{H}_q^g$ tels que $T_p\pi_{|\mathcal{H}_p^g}(u_p) = T_q\pi_{|\mathcal{H}_q^g}(u_q)$ et $T_p\pi_{|\mathcal{H}_p^g}(v_p) = T_q\pi_{|\mathcal{H}_q^g}(v_q)$.
Comme τ est surjective, il existe $a \in R$ et $b \in R$ tels que $p = \tau(a)$ et $q = \tau(b)$ et comme $T_b\tau_{|\mathcal{H}_b^\eta}$ est un isomorphisme, il existe deux vecteurs uniques u_b et $v_b \in \mathcal{H}_b^\eta$ tels que $T_b\tau(u_b) = u_q$ et $T_b\tau(v_b) = v_q$.
On a donc

$$g_q(u_q, v_q) = g_{\tau(b)}\left(T_b\tau_{|\mathcal{H}_b^\eta}(u_b), T_b\tau_{|\mathcal{H}_b^\eta}(v_b)\right) = \eta_b(u_b, v_b).$$

Mais, comme η est $\pi \circ \tau$-transverse, alors

$$\eta_b(u_b, v_b) = \eta_a(u_a, v_a),$$

d'où

$$g_q(u_q, v_q) = g_p(u_p, v_p).$$

$(\Longleftarrow)$ Soient $a, b \in R$ tels que $(\pi\circ\tau)(a) = (\pi\circ\tau)(b)$ et u_a et $v_a \in \mathcal{H}_a^\eta$ et u_b et $v_b \in \mathcal{H}_b^\eta$ tels que $T_a(\pi \circ \tau)_{|\mathcal{H}_a^\eta}(u_a) = T_b(\pi \circ \tau)_{|\mathcal{H}_b^\eta}(u_b)$ et $T_a(\pi \circ \tau)_{|\mathcal{H}_a^\eta}(v_a) = T_b(\pi \circ \tau)_{|\mathcal{H}_b^\eta}(v_b)$.

On a

$$\eta_b(u_b, v_b) = g_{\tau(b)}\left(T_b\tau(u_b), T_b\tau(v_b)\right).$$

Mais comme g est π-transverse, alors

$$g_{\tau(b)}\left(T_b\tau_{|\mathcal{H}_b^\eta}(u_b), T_b\tau_{|\mathcal{H}_b^\eta}(v_b)\right) = g_{\tau(a)}\left(T_a\tau_{|\mathcal{H}_a^\eta}(u_a), T_a\tau_{|\mathcal{H}_a^\eta}(v_a)\right),$$

d'où

$$\eta_b(u_b, v_b) = \eta_a(u_a, v_a).$$

✠

Remarque. De la remarque précédente, on déduit qu'en particulier, la composée d'une submersion riemannienne avec une submersion riemannienne surjective est une submersion riemannienne.

1.3 Métriques invariantes par l'action d'un groupe de Lie

Comme un groupe de Lie est en particulier une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut le munir d'une métrique riemannienne. Toutefois, pour ajouter de l'intérêt à cette métrique, nous allons la choisir de telle sorte qu'elle tienne compte la structure de groupe.

Soit G un groupe de Lie. Il agit sur lui-même par multiplication à gauche. Cette action nous permet de définir pour tout $x \in G$, la translation à gauche

$$\begin{array}{cccc} L_x & : & G & \longrightarrow & G \\ & & p & \longmapsto & xp \end{array}$$

qui est bien un difféomorphisme.

Définition 1.3.1. Soit G un groupe de Lie et g une métrique riemannienne sur G. La métrique g est dite **invariante à gauche** si pour tout $x \in G$, la translation $L_x : G \to G$ est une isométrie. C'est-à-dire que pour tout $p \in G$, et tous $u, v \in T_pG$,

$$g_{xp}(T_pL_x(u), T_pL_x(v)) = g_p(u, v).$$

Proposition 1.3.1. *Soit G un groupe de Lie et e l'élément neutre de G. Soit $< \cdot, \cdot >$ un produit scalaire sur T_eG. Alors la métrique g sur G définie pour tout $p \in G$ et tous $u, v \in T_pG$ par*

$$g_p(u, v) = < T_pL_{p^{-1}}(u), T_pL_{p^{-1}}(v) >$$

est invariante à gauche.

Preuve. Comme $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire, g définit bien une métrique riemannienne sur G. Il ne reste plus qu'à vérifier que cette métrique est invariante à gauche. Soient $x, p \in G$ et $u, v \in T_pG$, alors

$$\begin{aligned} g_{xp}(T_pL_x(u), T_pL_x(v)) &= < T_{xp}L_{p^{-1}x^{-1}}(T_pL_x(u)), T_{xp}L_{p^{-1}x^{-1}}(T_pL_x(v)) > \\ &= < T_p\left(L_{p^{-1}x^{-1}} \circ L_x\right)(u), T_p\left(L_{p^{-1}x^{-1}} \circ L_x\right)(v) > \\ &= < T_pL_{p^{-1}}(u), T_pL_{p^{-1}}(v) > \\ &= g_p(u, v). \end{aligned}$$

✠

Remarque. La proposition 1.3.1 signifie que pour avoir une métrique riemannienne invariante à gauche sur G il suffit de se donner un produit scalaire sur l'espace tangent T_eG en l'élément neutre. De plus, remarquons que pour tous u, $v \in T_eG$, et pour la métrique invariante à gauche g définie par la proposition 1.3.1,

$$g_e(u, v) =< u, v > .$$

Exemple 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $GL_n(\mathbb{R})$, le groupe des matrices de déterminant non nul et notons I_n la matrice identité.
On sait que $T_{I_n}GL_n(\mathbb{R})$ n'est autre que l'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc, le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini pour toutes matrices carrées C, D par

$$< C, D >= \operatorname{tr}({}^tCD)$$

permet de munir $GL_n(\mathbb{R})$ de la métrique riemannienne

$$g_A(C, D) = \operatorname{tr}({}^tC\,{}^tA^{-1}A^{-1}D) \qquad A \in GL_n(\mathbb{R}),\ C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Plus généralement, si un groupe de Lie agit sur une variété riemannienne, on peut définir une métrique invariante sur cette variété. C'est la définition suivante

Définition 1.3.2. Soit G un groupe de Lie agissant sur une variété riemannienne (M, g) par une action θ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dit que la métrique g est **θ-invariante** si pour tout $x \in G$, le difféomorphisme

$$\begin{array}{cccc} \theta_x & : & M & \longrightarrow & M \\ & & p & \longmapsto & \theta(x, p) \end{array}$$

est une isométrie. Dans ce cas, on dira que le groupe G **agit** sur la variété M **par isométries**.

On sait que l'orbite O_p d'un point $p \in M$ par l'action du groupe de Lie G sur la variété M est une sous-variété de M [15]. On va voir alors que l'on peut raffiner la définition de métrique invariante sur les orbites en utilisant les espaces normaux. C'est une définition analogue à celle-ci que l'on va retrouver plus tard dans le cas des groupoïdes de Lie.

Définition 1.3.3. Soit G un groupe de Lie agissant sur une variété riemannienne (M, g) par l'action $\theta : G \times M \to M$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
La métrique g est dite **transversalement θ-invariante** si pour tout $x \in G$, tout $p \in M$ et tout $q \in O_p$, l'application $T_q\theta_{x|N_qO_p} : N_qO_p \to N_{x\cdot q}O_p$ est une isométrie. C'est-à-dire que pour tous $u, v \in N_qO_p$,

$$g_{x\cdot q}\left(T_p\theta_x(u), T_p\theta_x(v)\right) = g_q(u, v).$$

Proposition 1.3.2. *Soit G un groupe de Lie agissant sur une variété riemannienne (M, g) par une action $\theta : G \times M \to M$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si la métrique g est θ-invariante, alors elle est transversalement θ-invariante.*

Preuve. Il suffit pour $x \in G$, $p \in M$ et $q \in O_p$ de restreindre l'application tangente $T_q\theta_x$ à N_qO_p. ✠

La notion de métrique transversalement invariante par l'action d'un groupe de Lie est plus générale que celle de métrique invariante par l'action d'un groupe de Lie. Nous verrons, par la suite, que, dans le cas des groupoïdes, on ne peut pas avoir cette dernière. C'est pourquoi, la première sera d'une grande importance.

2

Groupoïdes de Lie

2.1 Généralités

Définition 2.1.1. Un **groupoïde** est un couple d'ensembles (G, M) muni de la structure définie par

i. Deux applications surjectives $s : G \to M$ et $t : G \to M$ appelées respectivement **source** et **but** ;

ii. Une loi de composition partielle $* : (x, y) \mapsto x * y$ définie sur

$$G^{(2)} = \{(x, y) \in G \times G \mid t(y) = s(x)\}$$

et à valeurs dans G. Cette loi satisfait les conditions suivantes :

▷ *Compatibilité avec s et t*. Pour tout $(x, y) \in G^{(2)}$,

$$s(x * y) = s(y) \text{ et } t(x * y) = t(x);$$

▷ *Associativité*. Pour tous $x, y, z \in G$ tels que $(x, y) \in G^{(2)}$ et $(y, z) \in G^{(2)}$,

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

iii. Une application injective $\varepsilon : M \to G$ appelée **section unité**. Elle vérifie

▷ $s \circ \varepsilon = t \circ \varepsilon = id_M$;

▷ Pour tout $x \in G$, $\varepsilon(t(x)) * x = x * \varepsilon(s(x)) = x$.

iv. Une application bijective involutive $\iota : G \to G$, appelée **inversion**, telle que pour tout $x \in G$,

▷ $(x, \iota(x)) \in G^{(2)}$ et $(\iota(x), x) \in G^{(2)}$;

▷ $x * \iota(x) = \varepsilon(t(x))$ et $\iota(x) * x = \varepsilon(s(x))$.

L'ensemble M est appelé **ensemble des objets** du groupoïde, on l'identifie parfois à l'ensemble $\varepsilon(M)$ des unités de G. Quant à l'ensemble G, on l'appelle **ensemble des flèches** du groupoïde et l'ensemble $G^{(2)}$ **ensemble des flèches composables**.
Le groupoïde ainsi défini sera noté $G \rightrightarrows M$.

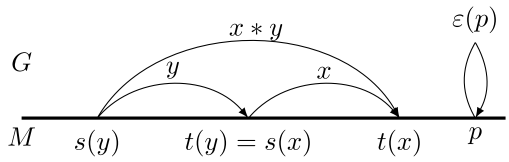


FIGURE 2.1 – Un groupoïde

Notation. Lorsqu'il s'agira de considérer l'application, on préférera noter la loi $*$ du groupoïde $G \rightrightarrows M$ par κ.

Exemple 5. Soit G un groupe et e son élément neutre.
Le couple $(G, \{e\})$ est un groupoïde, où

$$s \ : \ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \{e\} \\ x & \longmapsto & e \end{array} \quad \text{et} \quad t \ : \ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \{e\} \\ x & \longmapsto & e. \end{array}$$

À ce moment, l'ensemble des flèches composables est $G \times G$ tout entier et la loi du groupe est la loi de ce groupoïde.
La section unité est l'application

$$\varepsilon \ : \ \begin{array}{ccc} \{e\} & \longleftrightarrow & G \\ e & \longmapsto & e \end{array}$$

et l'inversion est définie par

$$\iota \ : \ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1}. \end{array}$$

On voit alors qu'un groupe n'est qu'un cas particulier de groupoïde.

Exemple 6. Prenons $G = \mathbb{R}^2$ et $M = \mathbb{R}$.
On peut définir une structure de groupoïde sur ce couple d'ensembles en définissant les applications structurelles que voici

$$s \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (p,q) & \longmapsto & p \end{array} \quad \text{et} \quad t \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (p,q) & \longmapsto & q \end{array}$$

L'ensemble des flèches composables $G^{(2)}$ est défini par

$$\begin{aligned} G^{(2)} &= \{((p',q'),(p,q)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid s(p',q') = t(p,q)\} \\ &= \{((p',q'),(p,q)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid p' = q\} \\ &= \{((q,q'),(p,q)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

La loi du groupoïde est donnée comme ceci :

$$\kappa \ : \ \begin{array}{ccc} G^{(2)} & \longrightarrow & G = \mathbb{R}^2 \\ ((q,q'),(p,q)) & \longmapsto & (q,q') * (p,q) = (p,q'). \end{array}$$

Elle vérifie les propriétés suivantes :

- ▷ Pour tous $((q,q'),(p,q)) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$s(((q,q')*(p,q))) = s(p,q') = p = s(p,q)$$

  et

$$t(((q,q')*(p,q))) = t(p,q') = q' = t(p',q').$$

- ▷ Pour tous $(q,q'),(p,q),(p',p) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$((q,q')*(p,q))*(p',p) = (p,q')*(p',p) = (p',q')$$

  et

$$(q,q')*((p,q)*(p',p)) = (q,q')*(p',q) = (p',q').$$

La section unité est l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon & : & \mathbb{R} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & p & \longmapsto & (p,p) \end{array}$$

et elle vérifie

- ▷ Pour tout $p \in \mathbb{R}$, $(s \circ \varepsilon)(p) = s(p,p) = p$ et $(t \circ \varepsilon)(p) = t(p,p) = p$;
- ▷ Pour tous $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\varepsilon(t(p,q))*(p,q) = (q,q)*(p,q) = (p,q)$$

  et

$$(p,q)*\varepsilon(s(p,q)) = (p,q)*(p,p) = (p,q).$$

Enfin, il ne reste plus qu'à définir l'inversion

$$\begin{array}{rcccc} \iota & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (p,q) & \longmapsto & (q,p) \end{array}$$

et elle vérifie

- ▷ Pour tous $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$s(\iota(p,q)) = s(q,p) = q = t(p,q)$$

  et

$$t(\iota(p,q)) = t(q,p) = p = s(p,q).$$

- ▷ Pour tous $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(p,q)*\iota(p,q) = (p,q)*(q,p) = (q,q) = \varepsilon(t(p,q))$$

  et

$$\iota(p,q)*(p,q) = (q,p)*(p,q) = (p,p) = \varepsilon(s(p,q)).$$

En identifiant $M = \mathbb{R}$ et $\varepsilon(M)$, on peut représenter ce groupoïde avec la figure ci-dessous

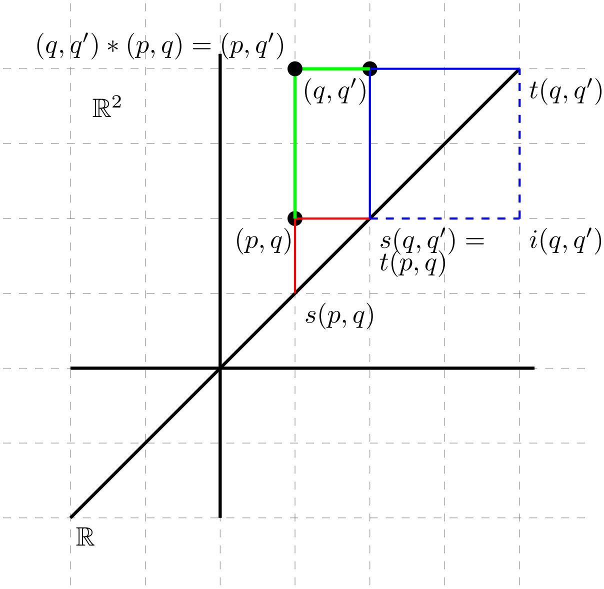


FIGURE 2.2 – Le groupoïde $\mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$

Cet exemple se généralise à n'importe quel ensemble M en définissant de manière analogue le groupoïde $M \times M \rightrightarrows M$ appelé **groupoïde des paires** de M.
Cet exemple nous donne aussi une autre manière de visualiser un groupoïde que celle de la Figure 2.1 :

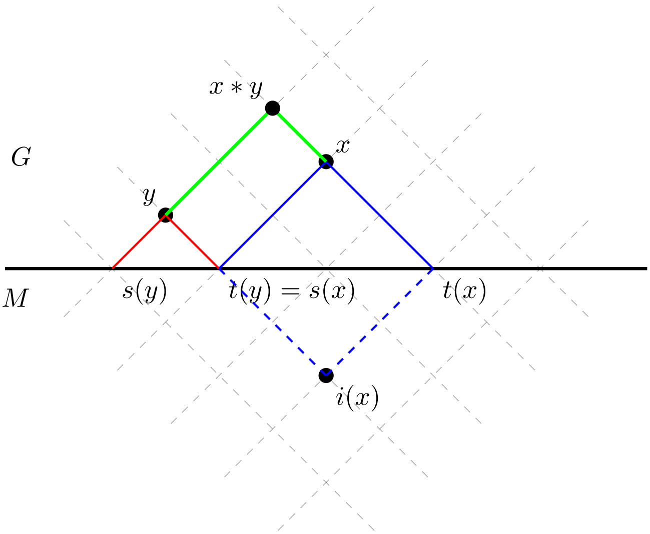


FIGURE 2.3 – Autre représentation d'un groupoïde

Exemple 7. Soit Γ un groupe agissant sur un ensemble M par une action notée $\theta : \Gamma \times M \to M$.
Le couple $(\Gamma \times M, M)$ est un groupoïde appelé le **groupoïde des transformations** de M par l'action de Γ, où

$$\begin{array}{rcrcl} s & : & \Gamma \times M & \longrightarrow & M \\ & & (x,p) & \longmapsto & p \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcrcl} t & : & \Gamma \times M & \longrightarrow & M \\ & & (x,p) & \longmapsto & \theta(x,p) \end{array}$$

Posons $G = \Gamma \times M$. L'ensemble des flèches composables $G^{(2)}$ est donné par

$$\begin{aligned} G^{(2)} &= \{((x,p),(y,q)) \in G \times G \,|\, t(y,q) = s(x,p)\} \\ &= \{((x,p),(y,q)) \in G \times G \,|\, \theta(y,q) = p\} \\ &= \{((x,\theta(y,q)),(y,q)) \,|\, x,y \in \Gamma, q \in M\}. \end{aligned}$$

Par la suite, on définit la loi $*$ par

$$\begin{array}{rcccc} \kappa & : & G^{(2)} & \longrightarrow & G \\ & & ((x,\theta(y,q)),(y,q) & \longmapsto & (x,\theta(y,q)) * (y,q) = (xy,q). \end{array}$$

Elle vérifie les propriétés suivantes :

▷ Pour tous $((x,\theta(y,q),(y,q)) \in G^{(2)}$, on a

$$s((x,\theta(y,q)) * (y,q)) = s(xy,q) = q = s(y,q)$$

et

$$t((x,\theta(y,q)) * (y,q)) = t(xy,q) = \theta(xy,q) = t(x,\theta(y,q)).$$

▷ Pour tous $(x,\theta(yz,q)),(y,\theta(z,q))$ et $(z,q) \in G$, on a

$$((x,\theta(yz,q)) * (y,\theta(z,q))) * (z,q) = (xy,\theta(z,q)) * (z,q) = (xyz,q)$$

et

$$(x,\theta(yz,q)) * ((y,\theta(z,q)) * (z,q)) = (x,\theta(yz,q)) * (yz,q) = (xyz,q).$$

Puis, si on note e l'élément neutre de G, alors on définit la section unité par

$$\begin{array}{rcrcl} \varepsilon & : & M & \longleftrightarrow & G \\ & & p & \longmapsto & (e,p). \end{array}$$

En effet, on a bien les propriétés suivantes :

▷ Pour tous $p \in M$,

$$(s \circ \varepsilon)(p) = s(e,p) = p$$

et

$$(t \circ \varepsilon)(p) = t(e,p) = \theta(e,p) = p;$$

▷ Pour tous $(x,p) \in G$, on a

$$\varepsilon(t(x,p)) * (x,p) = \varepsilon(\theta(x,p)) * (x,p) = (e,\theta(x,p)) * (x,p) = (ex,p) = (x,p)$$

et

$$(x,p) * \varepsilon(s(x,p)) = (x,p) * \varepsilon(p) = (x,p) * (e,p) = (xe,p) = (x,p).$$

Enfin, il ne reste plus qu'à définir l'inversion

$$\begin{array}{cccc} \iota & : & G & \longrightarrow & G \\ & & (x,p) & \longmapsto & (x^{-1}, \theta(x,p)). \end{array}$$

Elle vérifie les propriétés :

▷ Pour tous $(x,p) \in G$, on a

$$s(\iota(x,p)) = s(x^{-1}, \theta(x,p)) = \theta(x,p) = t(x,p)$$

et

$$t(\iota(x,p)) = t(x^{-1}, \theta(x,p)) = \theta(x^{-1}, \theta(x,p)) = \theta(x^{-1}x, p) = p = s(x,p).$$

▷ Pour tous $(x,p) \in G$, on a

$$(x,p) * \iota(x,p) = (x,p) * (x^{-1}, \theta(x,p) = (xx^{-1}, \theta(x,p)) = (e, \theta(x,p)) = \varepsilon(t(x,p))$$

et

$$\iota(x,p) * (x,p) = (x^{-1}, \theta(x,p)) * (x,p) = (x^{-1}x, p) = (e,p) = \varepsilon(s(x,p)).$$

Proposition 2.1.1. *Soit* $G \rightrightarrows M$ *un groupoïde et soit* $p \in M$.
L'ensemble G_p *défini par*

$$G_p = \{x \in G \,|\, s(x) = t(x) = p\}$$

est un groupe pour la restriction de la loi κ *à* $G_p \times G_p$.

Preuve.

▷ Soient $x, y \in G_p$.
Comme $s(x * y) = s(y) = p$ et que $t(x * y) = t(x) = p$ alors $x * y \in G_p$;

▷ Comme $s(\varepsilon(p)) = t(\varepsilon(p)) = p$ alors $\varepsilon(p) \in G_p$. Plus précisément, $\varepsilon(p)$ est l'élément neutre de G_p. En effet, pour tout $x \in G_p$, on a $x * \varepsilon(p) = x * \varepsilon(s(x)) = x$ et $\varepsilon(p) * x = \varepsilon(t(x)) * x = x$;

▷ Enfin, pour $x \in G_p$, $\iota(x) \in G_p$, car $s(\iota(x)) = t(x) = p$ et $t(\iota(x)) = s(x) = p$ et par définition de groupoïde, il s'agit de l'inverse de x.

✠

Définition 2.1.2. Le groupe G_p de la proposition 2.1.1 est appelé **groupe d'isotropie** du point p.

Exemple 8. Soit Γ un groupe agissant sur un ensemble M et considérons le groupoïde des transformations de M par l'action de Γ défini à l'exemple 7.
Soit $p \in M$ et posons $G = \Gamma \times M$. Le groupe d'isotropie du point p est

$$\begin{aligned} G_p &= \{(x,q) \in G \,|\, s(x,q) = t(x,q) = p\} \\ &= \{(x,p) \in G \,|\, \theta(x,p) = p\} \\ &= \mathrm{Stab}_G(p) \times \{p\} \end{aligned}$$

où $\mathrm{Stab}_G(p)$ désigne le stabilisateur du point p par l'action θ.

Définition 2.1.3. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde, $H \subset G$ et $S \subset M$. On dira que le couple (H, S) est un **sous-groupoïde** de $G \rightrightarrows M$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

i. $s(H) = S$, $t(H) = S$ et $\varepsilon(S) \subseteq H$;
ii. Pour tous $x, y \in H$ composables, $x * y \in H$;
iii. Pour tout $x \in H$, $\iota(x) \in H$.

Dans ce cas, ce sous-groupoïde sera aussi noté $H \rightrightarrows S$

En d'autres termes, un sous-groupoïde est un couple de sous-ensembles de flèches et d'objets qui forme un groupoïde. Les applications structurelles ne sont autres que les restrictions des applications structurelles du groupoïde ambiant.

Exemple 9. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde.

1. Le couple $(\varepsilon(M), M)$ est un sous-groupoïde appelé **groupoïde neutre** ;
2. Soit $p \in M$. Alors le couple $(G_p, \{p\})$ est un sous-groupoïde ;
3. Plus généralement, soit $A \subset M$ et posons $G_A = s^{-1}(A) \cap t^{-1}(A)$.
   Le couple (G_A, A) est alors un sous-groupoïde pour la restriction des applications structurelles du groupoïde $G \rightrightarrows M$.

Exemple 10. Soient M et B deux ensembles et $\pi : M \to B$ une surjection. Considérons l'ensemble

$$M \times_B M = \{(p, q) \in M \times M \mid \pi(p) = \pi(q)\}.$$

Le couple $(M \times_B M, M)$ est un sous-groupoïde du groupoïde $M \times M \rightrightarrows M$ des paires de M, on l'appelle **groupoïde de la surjection** π. En effet,

- ▷ Soient (p, q) et $(r, p) \in M \times_B M$ deux éléments composables de $M \times_B M$.
  On a $(p, q) * (r, p) = (r, q)$ et comme $\pi(p) = \pi(q)$ et que $\pi(r) = \pi(p)$, alors $\pi(q) = \pi(r)$ et donc $(r, q) \in M \times_B M$.
- ▷ Soit $(p, q) \in M \times_B M$. Comme $\iota(p, q) = (q, p)$ alors $\iota(p, q) \in M \times_B M$;
- ▷ Comme pour tout $p \in M$, $\varepsilon(p) = (p, p)$, il est évident que $\varepsilon(M) \subset M \times_B M$;
  De plus, comme pour tout $p \in M$, $s(p, p) = p$ et $t(p, p) = p$ alors on a aussi $s(M \times_B M) = M$ et $t(M \times_B M) = M$.

2.2 Action d'un groupoïde sur un ensemble

Définition 2.2.1. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde. Soit E un ensemble. Soit $\tau : E \to M$ une application. Considérons l'ensemble

$$G \times_M E = \{(x, q) \in G \times E \mid s(x) = \tau(q)\}$$

On dit que le groupoïde $G \rightrightarrows M$ **agit** sur l'ensemble E s'il existe une application

$$\begin{array}{cccc} \theta & : & G \times_M E & \longrightarrow & E \\ & & (x, q) & \longmapsto & \theta(x, q) = x \cdot q \end{array}$$

telle que

i. Pour tout $(x, q) \in G \times_M E$, $\tau(x \cdot q) = t(x)$;

ii. Pour tout $(y, x) \in G^{(2)}$ et tout $q \in E$ où $(x, q) \in G \times_M E$, $y \cdot (x \cdot q) = (y * x) \cdot q$;

iii. Pour tout $q \in E$, $\varepsilon(\tau(q)) \cdot q = q$.

L'application θ est appelée l'**action** du groupoïde $G \rightrightarrows M$ sur l'ensemble E et l'application τ est appelée le **moment** de l'action θ.

$$\begin{tikzcd}
G \times_M E \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "\tau"] & G \times_M E \arrow[l, "\theta"'] \arrow[d, "\pi_1"] \\
G \arrow[r, "s"'] & M & G \arrow[l, "t"]
\end{tikzcd}$$

Définition 2.2.2. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde agissant sur un ensemble E par une action θ de moment τ. Soit $q \in E$.
On appelle orbite de q l'ensemble que l'on note $O(q)$ et défini par

$$O(q) = \{x \cdot q \mid x \in s^{-1}(\{\tau(q)\})\}$$

Exemple 11. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Soit e l'élément neutre de G. En regardant le groupe G comme étant le groupoïde $G \rightrightarrows \{e\}$, l'action de G sur E définit une action de $G \rightrightarrows \{e\}$ sur E de moment $\tau : p \mapsto e$.

Exemple 12 (Action d'un groupoïde sur son ensemble des objets)**.**
Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde. Posons $E = M$ et $\tau = id_M$.
Dans ce cas, l'ensemble $G \times_M M$ est défini par

$$G \times_M M = \{(x, p) \in G \times M \mid s(x) = p\} = \{(x, s(x)) \mid x \in G\}$$

qui rien d'autre que le graphe de la source s qui est en bijection avec G.
Le groupoïde $G \rightrightarrows M$ agit sur son espace des objets M par

$$\begin{array}{rccc}
\overline{\theta} & : & G \times_M M & \longrightarrow & M \\
& & (x, s(x)) & \longmapsto & \overline{\theta}(x, s(x)) = x \cdot s(x) = t(x)
\end{array}$$

Vérifions alors qu'il s'agit bien d'une action d'un groupoïde :

- ▷ Il est évident que pour tout $x \in G$, $\mathrm{id}_M(\overline{\theta}(x, s(x))) = t(x)$;
- ▷ Soit $(y, x) \in G^{(2)}$. On a $\overline{\theta}(y, \overline{\theta}(x, s(x)) = \overline{\theta}(y, t(x)) = \overline{\theta}(y, s(y)) = t(y)$.
  D'un autre côté, $\overline{\theta}(y * x, s(y * x)) = t(y * x) = t(y)$;
- ▷ Soit $p \in M$. On a bien $\overline{\theta}(\varepsilon(\mathrm{id}_M(p)), s(\varepsilon(p))) = t(\varepsilon(p)) = p$.

Enfin, l'orbite d'un point $p \in M$ est donnée par $O(p) = \{t(x) \mid s(x) = p\}$

Exemple 13 (Action d'un groupoïde sur son ensemble des flèches)**.**
Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde. Posons $E = G$ et $\tau = t$.
Dans ce cas, l'ensemble $G \times_M G$ est défini par

$$G \times_M G = \{(x, q) \in G \times G \mid s(x) = t(q)\} = G^{(2)}.$$

Le groupoïde $G \rightrightarrows M$ agit sur son espace des flèches G par

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\theta} & : & G \times_M G & \longrightarrow & G \\ & & (x,q) & \longmapsto & \tilde{\theta}(x,q) = x * q. \end{array}$$

Vérifions alors qu'il s'agit bien d'une action d'un groupoïde :

- ▷ Par définition, pour tout $(x,q) \in G^{(2)}$, $t(x*q) = t(x)$;
- ▷ L'associativité de la loi $*$ donne le deuxième point de la définition ;
- ▷ Soit $q \in G$. On a par définition $\varepsilon(t(q)) * q = q$.

Enfin, l'orbite d'un point $q \in G$ est donnée par

$$O(q) = \{x * q \,|\, s(x) = t(q)\} = s^{-1}(\{t(q)\}) * q$$

Exemple 14 (Action d'un groupoïde sur l'ensemble des flèches composables)**.**
Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde. Posons $E = G^{(2)}$ et définissons l'application

$$\begin{array}{ccccc} \tau^* & : & G^{(2)} & \longrightarrow & M \\ & & (x,y) & \longmapsto & \tau^*(x,y) = s(x) = t(y). \end{array}$$

Considérons l'ensemble $(G \times_M G^{(2)})_*$ défini par

$$(G \times_M G^{(2)})_* = \{(z,(x,y)) \in G \times G^{(2)} \,|\, s(z) = s(x) = t(y)\}.$$

Le groupoïde $G \rightrightarrows M$ agit sur l'espace des flèches composables $G^{(2)}$ par

$$\begin{array}{ccccc} \theta^* & : & (G \times_M G^{(2)})_* & \longrightarrow & G \\ & & (z,(x,y)) & \longmapsto & (x * \iota(z), z * y). \end{array}$$

Vérifions alors qu'il s'agit bien d'une action d'un groupoïde :

- ▷ Soit $(z,(x,y)) \in G \times_M G^{(2)}$, alors $\tau^*(x * \iota(z), z * y) = t(z * y) = t(z)$;
- ▷ Soient $(z_1, z_2) \in G^{(2)}$ et $(x,y) \in G^{(2)}$ tel que $(z_2,(x,y)) \in (G \times_M G^{(2)})_*$. On a alors

$$\begin{aligned} \theta^*(z_1, \theta^*(z_2,(x,y))) &= \theta^*(z_1,(x * \iota(z_2), z_2 * y)) \\ &= ((x * \iota(z_2)) * \iota(z_1), z_1 * (z_2 * y)) \\ &= (x * (\iota(z_2) * \iota(z_1)), (z_1 * z_2) * y) \\ &= (x * \iota(z_1 * z_2), (z_1 * z_2) * y) \\ &= \theta^*(z_2 * z_1, (x,y)) \end{aligned}$$

- ▷ Soit $(x,y) \in G^{(2)}$. On a alors

$$\theta^*(\varepsilon(\tau^*(x,y)),(x,y)) = (x * \iota(\varepsilon(s(x))), \varepsilon(t(y)) * y) = (x,y).$$

Soit maintenant $(x_0, y_0) \in G^{(2)}$. L'orbite de (x_0, y_0) par l'action θ^* est donnée par

$$\begin{aligned} O_*(x_0, y_0) &= \{\theta^*(z, (x_0, y_0)) \mid s(z) = \tau^*(x_0, y_0)\} \\ &= \{(x_0 * \iota(z), z * y_0) \mid s(z) = s(x_0) = t(y_0)\} \end{aligned}$$

Montrons que $O_*(x_0, y_0) = \kappa^{-1}(\{x_0 * y_0\})$.
Comme pour tout $z \in G$ tel que $s(z) = s(x_0) = t(y_0)$, $x_0 * \iota(z) * z * y_0 = x_0 * y_0$, alors $O_*(x_0, y_0) \subset \kappa^{-1}(\{x_0 * y_0\})$.
Réciproquement, soit $(x, y) \in \kappa^{-1}(\{x_0 * y_0\})$. Ce qui signifie que $x * y = x_0 * y_0$ et on a en particulier $s(y) = s(y_0)$. Posons alors $z = y * \iota(y_0)$.
On a donc $y = z * y_0$ et $s(z) = s(y * \iota(y_0)) = s(\iota(y_0)) = t(y_0)$.
Comme $x * y = x_0 * y_0$ et $y = z * y_0$, alors $x * (z * y_0) = x_0 * y_0$. Donc $x * z = x_0$ et donc $x = x_0 * \iota(z)$. D'où $(x, y) = (x_0 * \iota(z), z * y_0)$ et $s(z) = t(y_0) = s(x_0)$.

Proposition 2.2.1 (Groupoïde d'action)**.**
Soit $G \rightrightarrows M$ *un groupoïde agissant sur un ensemble* E *par une action notée* θ *de moment* τ*. Alors le couple* $(G \times_M E, E)$ *est un groupoïde appelé* ***groupoïde d'action****.*

Preuve. Les application source et but sont définies par

$$\begin{array}{rccc} \tilde{s} & : & G \times_M E & \longrightarrow & E \\ & & (x, q) & \longmapsto & q \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \tilde{t} & : & G \times_M E & \longrightarrow & E \\ & & (x, q) & \longmapsto & \theta(x, q). \end{array}$$

L'ensemble $(G \times_M E)^{(2)}$ est défini par

$$(G \times_M E)^{(2)} = \{(x, \theta(y, q), y, q) \mid (x, y) \in G^{(2)} \text{ et } (y, q) \in G \times_M E\}$$

et la loi de composition partielle par

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\kappa} & : & (G \times_M E)^{(2)} & \longrightarrow & G \times_M E \\ & & (x, \theta(y, q), y, q) & \longmapsto & (x * y, q). \end{array}$$

Puis, la section unité est définie par

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varepsilon} & : & E & \longrightarrow & G \times_M E \\ & & q & \longmapsto & (\varepsilon(\tau(q)), q). \end{array}$$

Enfin, l'inversion est définie par

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\iota} & : & G \times_M E & \longrightarrow & G \times_M E \\ & & (x, q) & \longmapsto & (\iota(x), \theta(x, q)). \end{array}$$

✠

Exemple 15. Si $G = \Gamma$ est un groupe et si $M = \{e\}$ avec e l'élément neutre de Γ, alors le groupoïde d'action est exactement le groupoïde des transformations de $\{e\}$ par l'action de Γ.

2.3 Groupoïdes de Lie

Dans cette section, nous allons définir un groupoïde de Lie d'une manière analogue à la définition d'un groupe de Lie ; c'est-à-dire, munir un groupoïde d'une structure $\mathcal{C}^\infty$ tout en ajoutant des hypothèse de compatibilité.

Définition 2.3.1. Un **groupoïde de Lie** est un groupoïde $G \rightrightarrows M$ pour lequel

i. G et M sont des variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$;
ii. $s : G \to M$ et $t : G \to M$ sont des submersions ;
iii. $\kappa : G^{(2)} \to G$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$;
iv. $\varepsilon : M \to G$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$;
v. $\iota : G \to G$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Plus précisément, les applications ε et ι sont respectivement une immersion et un difféomorphisme. Ce n'est qu'une conséquence immédiate des propriétés élémentaires qu'elles vérifient. Quant à la raison pour laquelle s et t sont des submersions, la proposition suivante explique cela,

Proposition 2.3.1. *Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie. Alors, l'ensemble des flèches composables $G^{(2)}$ est une sous-variété de $G \times G$.*

Preuve.
Considérons l'ensemble

$$\Delta_M = \{(p, p) \,|\, p \in M\}.$$

Comme M est une variété, Δ_M l'est aussi. De plus, on a

$$(s, t)^{-1}(\Delta_M) = G^{(2)}.$$

Comme s et t sont des submersions, il en est de même pour le couple d'applications (s, t), d'où le fait que $(s, t)^{-1}(\Delta_M)$ est une sous-variété. ✠

Remarque. Comme $s \circ \kappa = s \circ \pi_2$, où $\pi_2 : G^{(2)} \to G$ désigne la seconde projection, et que s et π_2 sont des submersions, on déduit que κ est elle aussi une submersion.

Exemple 16. Tous les groupoïdes précédemment cités peuvent être des exemples de groupoïdes de Lie :

- ▷ Si M est une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors le groupoïde $M \times M \rightrightarrows M$ des paires de M est un groupoïde de Lie ;
- ▷ Si G est un groupe de Lie agissant sur une variété M de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors le groupoïde $G \times M \rightrightarrows M$ des transformations de M est un groupoïde de Lie.

Exemple 17. L'un des premiers exemples de groupes de Lie est le groupe $GL_n(\mathbb{R})$. En se donnant un fibré vectoriel (E, π, M) de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ (voir la section 3 du chapitre 2 de [14]), on va définir un groupoïde de Lie analogue. Considérons l'ensemble

$$GL(E) = \{\psi_{pq} : E_p \to E_q \,|\, p, q \in M \text{ et } \psi_{pq} \text{ est un isomorphisme}\}.$$

Dans ce cas, le couple $(GL(E), M)$ est un groupoïde de Lie, appelé **groupoïde général linéaire** de E, où les applications structurelles sont définies par

$$\begin{array}{rcccl} s & : & GL(E) & \longrightarrow & M \\ & & \psi_{pq} & \longmapsto & p \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccl} t & : & GL(E) & \longrightarrow & M \\ & & \psi_{pq} & \longmapsto & q. \end{array}$$

L'ensemble des flèches composables est

$$GL(E)^{(2)} = \{(\psi_{pq}, \gamma_{rp}) \,|\, p, q, r \in M\}.$$

La loi du groupoïde est la composition des applications. C'est-à-dire que pour tous $p, q, r \in M$, on a

$$\psi_{pq} * \psi_{rp} = \psi_{pq} \circ \psi_{rp}.$$

La section unité est définie par

$$\begin{array}{rcccl} \varepsilon & : & M & \longrightarrow & GL(E) \\ & & p & \longmapsto & id_{E_p}. \end{array}$$

L'inversion est définie par

$$\begin{array}{rcccl} \iota & : & GL(E) & \longrightarrow & GL(E) \\ & & \psi_{pq} & \longmapsto & \psi_{pq}^{-1}. \end{array}$$

Enfin, le fait que $GL(E)$ soit une variété vient de la structure de fibré vectoriel définie ci-dessus. En effet, la famille $\left(\pi^{-1}(U_i), \varphi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_i)\right)_{i \in I}$ est un atlas de E où $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de M. Définissons alors, pour tous $i, j \in I$, l'application

$$\begin{array}{rcccl} \Phi_{ij} & : & U_j \times GL(\mathbb{R}^n) \times U_i & \longrightarrow & s^{-1}(U_i) \cap t^{-1}(U_j) \\ & & (q, L, p) & \longmapsto & \varphi_j^q \circ L \circ (\varphi_i^p)^{-1}. \end{array}$$

Chaque Φ_{ij} est une bijection et les $(\Phi_{lm})^{-1} \circ \Phi_{ij}$ sont des difféomorphismes. Ce qui fait de $GL(E)$ une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour laquelle $\Phi_{ij}, i, j \in I$ sont des difféomorphismes.
Ensuite, le fait que les applications structurelles soient de classe $\mathcal{C}^\infty$ est le résultats de calculs locaux. Enfin, le fait que la source s et que le but t soient des submersions vient en considérant la surjection

$$\begin{array}{rcccl} \rho & : & M \times M & \longrightarrow & GL(E) \\ & & (p, q) & \longmapsto & \psi_{pq} \end{array}$$

qui nous donne les deux égalités $\pi_1 = s \circ \rho$ et $\pi_2 = t \circ \rho$ qui font de s et t des submersions.

Définition 2.3.2 (Sous-groupoïde de Lie)**.**
Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie. Un **sous-groupoïde de Lie** est un sous-groupoïde $H \rightrightarrows S$ de $G \rightrightarrows M$ pour lequel

i. H et S sont des sous-variétés de G et M respectivement ;

ii. Pour tout $x \in H$, $T_x s(T_x H) = T_{s(x)} S$ et $T_x t(T_x H) = T_{t(x)} S$.

Exemple 18. Soient $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie et $U \subset M$ un ouvert de M (et donc une sous-variété de M). Posons $G_U = s^{-1}(U) \cap t^{-1}(U)$, c'est un ouvert de G et donc une sous-variété de G. Le sous-groupoïde $G_U \rightrightarrows U$ est un sous-groupoïde de Lie.

Exemple 19. Soient M et B deux variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\pi : M \to B$ une submersion surjective. Considérons l'ensemble

$$M \times_B M = \{(p,q) \in M \times M \mid \pi(p) = \pi(q)\}.$$

C'est une sous-variété de $M \times M$ car π est une submersion et $M \times_B M = (\pi,\pi)^{-1}(\Delta_B)$. Le couple $(M \times_B M, M)$ est un sous-groupoïde du groupoïde $M \times M \rightrightarrows M$ des paires de M car c'est le groupoïde de la surjection π. Voyons maintenant que c'est un sous-groupoïde de Lie appelé **groupoïde de la submersion** π.
En effet, soient $(p,q) \in M \times_B M$, $u \in T_pM$ et $v \in T_qM$.
Puisque qu'on a $T_{(p,q)}s(u,u) = u$ et $T_{(p,q)}t(v,v) = v$, alors

$$T_{(p,q)}s(T_{(p,q)}(M \times_B M)) = T_pM \quad \text{et} \quad T_{(p,q)}t(T_{(p,q)}(M \times_S M)) = T_qM.$$

2.4 Action d'un groupoïde de Lie sur une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$

Définition 2.4.1.
Soient $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie et E une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On dit que le groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$ agit sur la variété E au moment $\tau : E \to M$, si

i. Le groupoïde $G \rightrightarrows M$ agit sur l'ensemble E ;
ii. L'application $\tau : E \to M$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$;
iii. L'action θ du groupoïde est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 2.4.1. *Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie agissant sur une variété E de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le groupoïde d'action $G \times_M E \rightrightarrows E$ est un groupoïde de Lie.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la définition ci-dessus. ✠

Proposition 2.4.2. *Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie agissant sur une variété E de classe $\mathcal{C}^\infty$ par une action θ de moment τ. Supposons de plus que τ soit une submersion surjective. Soit $x \in G$ et posons $E_{s(x)} = \tau^{-1}(\{s(x)\})$ et $E_{t(x)} = \tau^{-1}(\{t(x)\})$. Alors l'application θ_x définie par*

$$\begin{array}{cccc} \theta_x & : & E_{s(x)} & \longrightarrow & E_{t(x)} \\ & & q & \longmapsto & \theta(x,q) = x \cdot q \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Preuve.

▷ Soient $q_1, q_2 \in E_{s(x)}$ tels que $x \cdot \xi_1 = x \cdot \xi_2$. Alors $\iota(x) \cdot (x \cdot q_1) = \iota(x) \cdot (x \cdot q_2)$. Donc $(\iota(x) * x) \cdot q_1 = (\iota(x) * x) \cdot q_2$. Donc $\varepsilon(s(x)) \cdot q_1 = \varepsilon(s(x)) \cdot q_2$.
Comme $\tau(q_1) = s(x) = \tau(q_2)$, alors si on revient à l'égalité précédente, cela donne $\varepsilon(\tau(q_1)) \cdot q_1 = \varepsilon(\tau(q_2)) \cdot q_2$. D'où $q_1 = q_2$ et donc θ_x est injective.

▷ Soit $r \in E_{t(x)}$. Posons alors $q = \iota(x) \cdot r$.
Comme $\tau(q) = \tau(\iota(x) \cdot r) = t(\iota(x)) = s(x)$, alors $q \in E_{s(x)}$.
De plus

$$\begin{aligned} x \cdot q &= x \cdot (\iota(x) \cdot r) &&= (x * \iota(x)) \cdot r \\ &= \varepsilon(t(x)) \cdot r &&= \varepsilon(\tau(r)) \cdot r \\ &= r. \end{aligned}$$

L'application θ_x est ainsi surjective.

▷ Enfin, θ_x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car l'action θ l'est.

✠

Définition 2.4.2. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie agissant sur un fibré vectoriel (E, π, M) par l'action notée θ de moment $\tau = \pi$. L'action θ est dite **linéaire** si pour tout $x \in G$, l'application $\theta_x : E_{s(x)} \to E_{t(x)}$ est linéaire.

Définition 2.4.3. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie agissant sur une variété E de classe $\mathcal{C}^\infty$ par l'action θ de moment τ.

i. L'action θ est dite **libre** si, pour tout $q \in E$,

$$x \cdot q = q \Longrightarrow x = \varepsilon(\tau(q)).$$

ii. L'action θ est dit **propre** si, l'application $G \times_M E \to E \times E$, $(x, q) \mapsto (q, \theta(x, q))$ est propre.

Remarque. Comme dans le cas des groupes de Lie, l'ensemble des orbites par l'action d'un groupoïde de Lie sur une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ est une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ par le critère de Godement. [4]

Proposition 2.4.3. *Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie agissant sur son espace des objets M par l'action $(x, s(x)) \mapsto t(x)$ et soit $p \in M$.*
L'orbite $O(p) = t(s^{-1}(\{p\}))$ du point p est une sous-variété de M.

Preuve. Le groupe d'isotropie G_p (qui est un groupe de Lie) agit sur la variété $s^{-1}(\{p\})$ par une action à droite qui n'est autre que la restriction de la loi du groupoïde à $s^{-1}(\{p\}) \times G_p$.

▷ Cette action est libre.
En effet, soient $x \in G_p$ et $\xi \in s^{-1}(\{p\})$ tels que $\xi * x = \xi$.
Alors, $\iota(\xi) * (\xi * x) = \iota(\xi) * \xi$. D'où $x = \varepsilon(s(\xi)) = \varepsilon(p)$;

▷ Cette action est propre. En effet, soit $K \subset s^{-1}(\{p\})$ un compact et posons

$$G_p^K = \{x \in G_p \,|\, (K * x) \cap K = \varnothing\},$$

où $K * x = \{\xi * x \,|\, \xi \in K\}$.
Posons

$$s^{-1}(\{p\}) \times_t s^{-1}(\{p\}) = \{(\xi_1, \xi_2) \in s^{-1}(\{p\}) \times s^{-1}(\{p\}) \,|\, t(\xi_1) = t(\xi_2)\}$$

et

$$K \times_t K = (K \times K) \cap \left(s^{-1}(\{p\}) \times_t s^{-1}(\{p\})\right),$$

Alors $K \times_t K$ est un fermé dans le compact $K \times K$, ce qui en fait un compact. Considérons l'application de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{array}{rccc} \delta & : & s^{-1}(\{p\}) \times_t s^{-1}(\{p\}) & \longrightarrow & G_p \\ & & (\xi_1, \xi_2) & \longmapsto & \iota(\xi_1) * \xi_2. \end{array}$$

Montons alors que $\delta(K \times_t K) = G_p^K$. Soit $x \in \delta(K \times_t K)$.
Dans ce cas, il existe $(\xi_1, \xi_2) \in K \times_t K$ tel que $x = \iota(\xi_1) * \xi_2$.
Remarquons que $\xi_1 * x = (\xi_1 * \iota(\xi_1)) * \xi_2 = \varepsilon(t(\xi_1)) * \xi_2 = \varepsilon(t(\xi_2)) * \xi_2 = \xi_2$ donc $\xi_1 \in K * x \cap K$ et par conséquent $\delta(K \times_t K) \subset G_p^K$.
Réciproquement, soit $x \in G_p^K$. Par définition, il existe $(\xi_1, \xi_2) \in K \times_t K$ tel que $\xi_1 * x = \xi_2$. Donc $x = \iota(\xi_1) * \xi_2$ et par conséquent $G_p^K \subset \delta(K \times_t K)$.
Comme $G_p^K = \delta(K \times_t K)$, il est alors image directe d'un compact par une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, il est donc compact.

Par conséquent, l'espace des orbites $(s^{-1}(\{p\}))/G_p$ est une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$. Considérons l'application de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{array}{rccc} \varrho & : & s^{-1}(\{p\})/G_p & \longrightarrow & M \\ & & \xi * G_p & \longmapsto & t_{|s^{-1}(\{p\})}(\xi) \end{array}$$

L'application ϱ est injective : soient ξ_1 et $\xi_2 \in s^{-1}(\{p\})$ tels que $\varrho(\xi_1 * G_p) = \varrho(\xi_2 * G_p)$ donc $t(\xi_1) = t(\xi_2)$. Ce qui nous permet d'écrire $\xi_2 = \xi_1 * (\iota(\xi_1) * \xi_2)$ et cela signifie que $\xi_2 \in \xi_1 * G_p$ et donc que $\xi_1 * G_p = \xi_2 * G_p$.
Par la suite, comme $\pi : s^{-1}(\{p\}) \to s^{-1}(\{p\})/G_p$ est une submersion et grâce au diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} s^{-1}(\{p\})/G_p \arrow[r, "\varrho"] & M \\ s^{-1}(\{p\}) \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "t_{|s^{-1}(\{p\})}"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $t_{|s^{-1}(\{p\})}$ est de rang constant [16], on peut dire que pour tout $\xi \in s^{-1}(\{p\})$, $\mathrm{rg}_{\xi * G_p}(\varrho) = \mathrm{rg}_\xi(t_{|s^{-1}(\{p\})})$ et donc ϱ est de rang constant et par conséquent c'est une immersion. Enfin, remarquons que $O(p) = \varrho(s^{-1}(\{p\})/G_p)$ et donc $O(p)$ est l'image directe d'une sous-variété par une immersion, ce qui en fait à son tour une sous-variété. ✠

Proposition 2.4.4. *Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie agissant sur son espace des objets M par l'action $(x, s(x)) \mapsto t(x)$. Soit $p \in M$ et posons $G_{O(p)} = s^{-1}(O(p)) \cap t^{-1}(O(p))$. Alors $G_{O(p)} = s^{-1}(O(p)) = t^{-1}(O(p))$.*

Preuve. Soit $x \in s^{-1}(O(p))$. Alors $s(x) \in O(p)$. Donc il existe $y \in s^{-1}(p)$ tel que $s(x) = t(y)$. Posons $z = x * y$.
On a bien $s(z) = s(x * y) = s(y) = p$ et $t(z) = t(x * y) = t(x)$, d'où $x \in t^{-1}(O(p))$.
On montre la deuxième inclusion de la même façon. ✠

Remarque. Comme l'image réciproque d'une sous-variété par une submersion est une sous-variété, on déduit alors de la proposition précédente que $G_{O(p)}$ est une sous-variété de G.

Proposition 2.4.5. *Soit* $G \rightrightarrows M$ *un groupoïde de Lie agissant sur son espace des objets* M *par l'action* $(x, s(x)) \mapsto t(x)$*. Soit* $p \in M$*.*
Alors $G_{O(p)} \rightrightarrows O(p)$ *est un sous-groupoïde de Lie.*

3

Groupoïdes riemanniens

3.1 Métriques invariantes par l'action d'un groupoïde

Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie agissant sur une variété E de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec un moment τ qui est une submersion surjective.
Dans cette section, nous voulons donner un sens au fait qu'une métrique sur la variété E soit invariante par l'action du groupoïde $G \rightrightarrows M$. Remarquons que cela n'est pas aussi directe que la notion de métrique invariante par l'action d'un groupe de Lie (définition 1.3.2). La raison en est que, comme le stipule la proposition 2.4.2, une flèche $x \in G$ ne peut déterminer qu'un difféomorphisme $\theta_x : E_{s(x)} \to E_{t(x)}$, ce qui est incomplet. C'est pour cela, qu'on va définir la notion de *métrique transversalement invariante* de manière analogue à celle de la définition 1.3.3.

Le groupoïde $G \rightrightarrows M$ agit sur son espace des objets M par l'action définie par $(x, s(x)) \mapsto t(x)$. Prenons $p \in M$, g une métrique riemannienne sur M et faisons agir le sous-groupoïde de Lie $G_{O(p)} \rightrightarrows O(p)$ sur le fibré normal $NO(p)$ avec la projection $\tau : NO(p) \to O(p)$ comme moment et considérons le produit fibré

$$G_{O(p)} \times_{O(p)} NO(p) = \{(x, s(x), v) \in G_{O(p)} \times NO(p) \,|\, v \in N_{s(x)}O(p)\}.$$

Puis, considérons pour $x \in G_{O(p)}$ l'espace

$$(HG_{O(p)})_x = (T_x s)^{-1}(N_{s(x)}O(p)) \cap (T_x t)^{-1}(N_{t(x)}O(p))$$

et la variété de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$HG_{O(p)} = \bigcup_{x \in G_{O(p)}} (x, (HG_{O(p)})_x).$$

La variété $HG_{O(p)}$ s'identifie à $G_{O(p)} \times_{O(p)}$ par l'application donnée par

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & HG_{O(p)} & \longrightarrow & G_{O(p)} \times_{O(p)} NO(p) \\ & & (x, \nu) & \longmapsto & (x, s(x), T_x s(\nu)) \end{array}$$

car pour tout $x \in G_{O(p)}$, $T_x s : HG_{O(p)} \to N_{s(x)}O(p)$ est un isomorphisme [5].

Nous sommes ainsi en mesure de définir la notion de *représentation normale* qui sera l'outil nécessaire permettant de définir la notion de métrique *transversalement invariante* par l'action d'un groupoïde.

Définition 3.1.1. La **représentation normale** du groupoïde $G \rightrightarrows M$ au point $p \in M$ est une action linéaire du sous-groupoïde de Lie $G_{O(p)} \rightrightarrows O(p)$ sur le fibré normal $NO(p)$ de moment la projection $\tau : NO(p) \to O(p)$ définie, après identification de $G_{O(p)} \times_{O(p)} NO(p)$ à $HG_{O(p)}$, par

$$\lambda(x, \nu) = (t(x), T_x t(\nu)), \quad (x, \nu) \in HG_{O(p)}.$$

Fixons $x \in G_{O(p)}$. Si $\nu \in T_x G$ tel que $(x, \nu) \in HG_{O(p)}$, définissons l'isomorphisme $\lambda_x : N_{s(x)}O(p) \to N_{t(x)}O(p)$, $T_x s(\nu) \mapsto T_x t(\nu)$.

Définition 3.1.2. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie agissant sur une variété riemannienne (E, g) par une action θ avec un moment τ qui est une submersion surjective. La métrique g est dite **transversalement θ-invariante** si pour tout $p \in E$, la représentation normale λ du groupoïde d'action $G \times_M E \rightrightarrows E$ en p définit une isométrie $\lambda_{(x,q)}$ pour tout $(x, q) \in (G \times_M E)_{\mathcal{O}(p)}$.

Proposition 3.1.1. *Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie agissant sur une variété riemannienne (E, g) par une action libre et propre θ avec un moment τ qui est une submersion surjective. Soit $\pi : E \to E/G$ l'application qui a tout point associe son orbite. Alors, la métrique g est transversalement θ-invariante si, et seulement si, elle est π-transverse.*

Preuve.
($\Longrightarrow$) Soient $p, q \in E$ tels que $\pi(p) = \pi(q)$ et $u_p, v_p \in \mathcal{H}^g_p$, $u_q, v_q \in \mathcal{H}^g_q$ tels que $T_p\pi(u_p) = T_q\pi(u_q)$ et $T_p\pi(v_p) = T_q\pi(v_q)$.
Comme $\pi^{-1}(\{\pi(p)\}) = \mathcal{O}(p)$ alors $T_q(\pi^{-1}(\{\pi(p)\})) = T_q\mathcal{O}(p)$, puis, $\mathcal{H}^g_q = N_q\mathcal{O}(p)$ et de même $\mathcal{H}^g_p = N_p\mathcal{O}(p)$.
Comme $u_p \in N_p\mathcal{O}(p)$ et $u_q \in N_q\mathcal{O}(p)$ alors il existe $\mu \in T_{(x,p)}(G \times_M E)$ tel que $T_{(x,p)}\tilde{s}(\mu) = u_p$ et $T_{(x,p)}\theta(\mu) = u_q$. De même, on peut trouver $\nu \in T_{(x,p)}(G \times_M E)$ tel que $T_{(x,p)}\tilde{s}(\nu) = v_p$ et $T_{(x,p)}\theta(\nu) = v_q$. On a alors

$$g_q(u_q, v_q) = g_{\theta(x,p)}(T_{(x,p)}\theta(\mu), T_{(x,p)}\theta(\nu)) = g_p(T_{(x,p)}\tilde{s}(\mu), T_{(x,p)}\tilde{s}(\nu)) = g_p(u_p, v_p)$$

où l'avant dernière égalité vient du fait que g est transversalement θ-invariante.
($\Longleftarrow$) Soit $(x, p) \in G \times_M E$ et $\mu, \nu \in T_{(x,p)}(G \times_M E)$ tels que l'on a
$T_{(x,p)}\tilde{s}(\mu), T_{(x,p)}\tilde{s}(\nu) \in N_pO(p)$ et $T_{(x,p)}\theta(\mu), T_{(x,p)}\theta(\nu) \in N_{\theta(x,p)}O(p)$.
Posons $q = \theta(x, p)$. On a alors $\pi(p) = \pi(q)$ et donc $\pi \circ \tilde{s}(x, p) = \pi \circ \theta(x, p)$.
Ce qui veut dire que l'on a $T_p\pi_{|\mathcal{H}^g_p}(T_{(x,p)}\tilde{s}(\mu)) = T_q\pi_{|\mathcal{H}^g_q}(T_{(x,p)}\theta(\mu))$ et que l'on a aussi $T_p\pi_{|\mathcal{H}^g_p}(T_{(x,p)}\tilde{s}(\nu)) = T_q\pi_{|\mathcal{H}^g_q}(T_{(x,p)}\theta(\nu))$.
Comme g est π-transverse, on a alors

$$g_q(T_{(x,p)}\theta(\mu), T_{(x,p)}\theta(\nu)) = g_p(T_{(x,p)}\tilde{s}(\mu), T_{(x,p)}\tilde{s}(\nu)).$$

Ce qui montre que g est transversalement θ-invariante. ✠

Exemple 20. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie agissant sur son espace des flèches par l'action libre et propre $\tilde{\theta} : (x, q) \mapsto x * q$ avec le moment $\tau = t$.
L'orbite d'une flèche $q \in G$ est donnée par

$$O(q) = \{x * q \,|\, s(x) = t(q)\} = s^{-1}(\{t(q)\}) * q.$$

L'espace des orbites G/G s'identifie à M par l'application $s^{-1}(\{t(q)\}) * q \mapsto s(q)$ et donc la projection $\pi : G \to G/G$ est identifiée à $s : G \to M$.
La proposition 3.1.1 permet de conclure que qu'une métrique riemannienne sur G est transversalement $\tilde{\theta}$-invariante si, et seulement si, elle est s-transverse.

3.2 Groupoïdes riemanniens

Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie. Dans cette section, nous allons munir ce groupoïde d'une une métrique sur l'espace des objets et une métrique sur l'espace des flèches. Toutefois, cette définition ne prend pas en compte la loi du groupoïde et ignore donc un élément fondamental du concept de groupoïde. C'est donc, pour pallier à cela, que nous allons voir qu'il faut définir une métrique riemannienne sur l'ensemble des flèches composables $G^{(2)}$. Enfin, nous nous demanderons si on peut définir une métrique en fonction d'une autre.

3.2.1 Métrique sur l'espace des objets

Définition 3.2.1. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie.
Une **0-métrique** sur $G \rightrightarrows M$ est une métrique riemannienne $g^{(0)}$ sur la variété M qui est transversalement invariante pour l'action $(x, s(x)) \mapsto t(x)$.

Remarque. Comme, pour l'action $(x, s(x)) \mapsto t(x)$, $G \times_M M$ s'identifie à G. Alors une 0-métrique est identifiée à une métrique sur la variété M pour laquelle la représentation normale λ du groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$ définit pour tout $x \in G_{O(p)}$ une isométrie λ_x. C'est cette identification que nous utiliserons par la suite.

Exemple 21. Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$. Toute métrique riemannienne g sur M est une 0-métrique du groupoïde de Lie $M \times M \rightrightarrows M$ des paires de M. Cela vient du fait que pour tout $p \in M$, $O(p) = M$ et donc la représentation normale est l'application qui au vecteur nul de l'espace normal de départ associe le vecteur nul de l'espace normal d'arrivée.

Proposition 3.2.1. *Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie tel que $s = t$. Alors toute métrique riemannienne g sur la variété M est une 0-métrique.*

Preuve. Soit $p \in M$. On a

$$O(p) = \{t(x) \,|\, s(x) = p\} = \{s(x) \,|\, s(x) = p\} = \{p\}.$$

Donc $G_{O(p)} = G_p$ le groupe d'isotropie de p. Soit λ la représentation normale du groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$ et $x \in G_p$. Dans ce cas $\lambda_x = \mathrm{id}_{N_{s(x)}\{p\}}$ et c'est donc bien une isométrie quelle que soit la métrique riemannienne considérée. ✠

Proposition 3.2.2. *Soit M et B deux variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\pi : M \to B$ une submersion. Soit g une métrique riemannienne sur M.*
Alors g est une 0-métrique du groupoïde de Lie $M \times_B M \rightrightarrows M$ de la submersion π si, et seulement si, g est π-transverse.

Preuve. Soit $p \in M$. On a $O(p) = \pi^{-1}(\{\pi(p)\})$. Donc

$$G_{O(p)} = \{(r, q) \in M \times_B M \,|\, \pi(r) = \pi(p) = \pi(q)\}.$$

Par la suite, la preuve est analogue à celle de la proposition 3.1.1 ✠

Toutefois, il existe des groupoïdes de Lie qu'on ne peut pas munir d'une 0-métrique. Pour le voir, considérons le contre-exemple suivant :

Exemple 22. Le groupe $\mathbb{R}$ agit sur le cylindre $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ par $a \cdot (b, z) \mapsto (e^a b, e^{i2\pi a} z)$. On peut donc considérer le groupoïde des transformations $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) \rightrightarrows \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$.

Soit $(b_0, z_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$.

$$\begin{aligned} O(b_0, z_0) &= \{t(a, b, z) \,|\, s(a, b, z) = (b_0, z_0)\} \\ &= \{(e^a b, e^{i2\pi a} z) \,|\, (b, z) = (b_0, z_0)\} \\ &= \{(e^a b_0, e^{i2\pi a} z_0) \,|\, a \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Prenons $(b_0, z_0) = (0, 1) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$. Dans ce cas,

$$O(0, 1) = \{(0, e^{i2\pi a}) \,|\, a \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathcal{S}^1 \simeq \mathcal{S}^1$$

donc

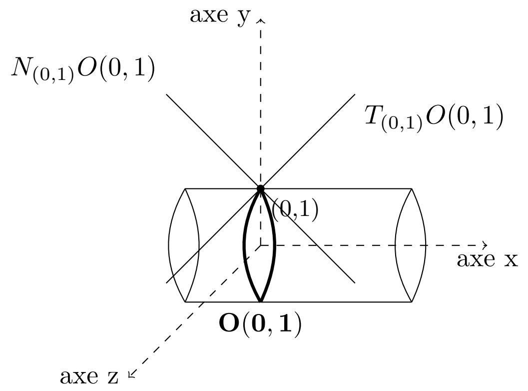
$$T_{(0,1)}O(0, 1) = \{0\} \times T_1\mathcal{S}^1 \simeq T_1\mathcal{S}^1$$

et puis

$$\begin{aligned} G_{O(0,1)} &= \{(a, b, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \,|\, (b, z) \in \{0\} \times \mathcal{S}^1 \text{ et } (e^a b, e^{i2\pi a} z) \in \{0\} \times \mathcal{S}^1\} \\ &= \{(a, 0, z) \,|\, a \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathcal{S}^1\} \end{aligned}$$

Prenons $x = (1, 0, 1) \in G_{O(0,1)}$ et soit g une métrique riemannienne sur $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$.
Dans ce cas,

$$N_{(0,1)}O(0, 1) = T_0\mathbb{R} \times N_1\mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{R}$$



Soit $\nu \in T_xG$ tel que $T_xs(\nu) \in N_{(0,1)}O(p)$ et $T_xt(\nu) \in N_{(0,1)}O(p)$. Donc, $\nu = (b, 0)$ avec $b \in \mathbb{R}$ en identifiant $T_0\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$, et donc, $T_xt(\nu) = (be, 0)$. D'où

$$\lambda_x((0,1),(b,0)) = e(b,0)$$

et dans ce cas $g_{(0,1)}(e(b_1,0), e(b_2,0)) = e^2 g_{(0,1)}((b_1,0),(b_2,0)) \neq g_{(0,1)}((b_1,0),(b_2,0))$, ce qui fait que λ_x ne peut pas être une isométrie et que, par conséquent, g ne peut pas être une 0-métrique.

3.2.2 Métrique sur l'espace des flèches

Définition 3.2.2. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie agissant sur son espace des flèches par l'action $\tilde{\theta} : (x, q) \mapsto x * q$ de moment l'application but t. Une **1-métrique** sur $G \rightrightarrows M$ est une métrique riemannienne $g^{(1)}$ sur la variété G telle que

i. La métrique $g^{(1)}$ est transversalement $\tilde{\theta}$-invariante ;

ii. L'inversion ι est une isométrie.

Remarque. Grâce à l'exemple 20, nous savons qu'une métrique riemannienne sur G est transversalement $\tilde{\theta}$-invariante si, et seulement si elle est s-transverse. Ajoutons de plus que comme ι est une isométrie et que $t = s \circ \iota$ alors cela est équivalent au fait que cette métrique soit t-transverse.

Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie et $g^{(1)}$ une 1-métrique sur ce groupoïde.
Soient $x \in G$ et $u, v \in T_{s(x)}M$.
On sait qu'il existe deux uniques vecteurs $\tilde{u}, \tilde{v} \in N_xs^{-1}(\{s(x)\})$ tels que $u = T_xs(\tilde{u})$ et $v = T_xs(\tilde{v})$. Comme la métrique $g^{(1)}$ est s-transverse, grâce à la proposition 1.2.1, il existe une unique métrique h sur M telle que

$$h_{s(x)}(u, v) = h_{s(x)}\left(T_xs(\tilde{u}), T_xs(\tilde{v})\right) = g^{(1)}_x(\tilde{u}, \tilde{v})$$

De même, pour $w, z \in T_{t(x)}M$, il existe deux uniques vecteurs $\tilde{w}, \tilde{z} \in N_xt^{-1}(\{t(x)\})$ tels que $w = T_xt(\tilde{w})$ et $z = T_xt(\tilde{z})$. Comme la métrique $g^{(1)}$ est t-transverse, grâce à la proposition 1.2.1, il existe une unique métrique k sur M telle que

$$k_{t(x)}(w, z) = k_{t(x)}\left(T_xt(\tilde{w}), T_xt(\tilde{z})\right) = g^{(1)}_x(\tilde{w}, \tilde{z})$$

Enfin, puisque l'inversion est une isométrie et que $t = s \circ \iota$, les métriques h et k concordent en une métrique commune que l'on note $g^{(0)}$ et on l'appelle **métrique induite** sur M de la 1-métrique $g^{(1)}$. Réciproquement, on dira que $g^{(1)}$ est une **extension** de $g^{(0)}$.

Proposition 3.2.3. *Soient $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie, $g^{(1)}$ une 1-métrique et $g^{(0)}$ la métrique induite sur M. Alors*

i. Les applications source et but sont des submersion riemanniennes ;

ii. La métrique $g^{(0)}$ est une 0-métrique.

Preuve.

i. Immédiat ;

ii. Soit λ la représentation normale du groupoïde $G \rightrightarrows M$.
Soient $p \in M$ et $x \in s^{-1}(O(p))$.
Soient $\mu, \nu \in T_xG$ tels que $T_xs(\mu) \in N_{s(x)}O(p)$ et $T_xs(\nu) \in N_{s(x)}O(p)$ (et par conséquent, $T_xt(\mu) \in N_{t(x)}O(p)$ et $T_xt(\nu) \in N_{t(x)}O(p)$). On a alors,

$$g^{(0)}_{t(x)}(\lambda_x(T_xs(\mu)), \lambda_x(T_xs(\nu))) = g^{(0)}_{t(x)}(T_xt(\mu), T_xt(\nu))$$

Puisque $T_xt(\nu) \in N_{t(x)}O(p)$ et que $t^{-1}(\{t(x)\}) \subset t^{-1}(O(p))$ on a donc $\nu \in (T_xt)^{-1}(N_{t(x)}O(p)) = N_xt^{-1}(O(p)) \subset N_xt^{-1}(\{t(x)\})$. De même, on montre des résultats similaires pour le vecteur μ. d'où

$$g^{(0)}_{t(x)}(T_xt(\mu), T_xt(\nu)) = g^{(1)}_x(\mu, \nu) = g^{(0)}_{s(x)}(T_xs(\mu), T_xs(\nu)).$$

✠

Exemple 23. Soit $(M, g^{(0)})$ une variété riemannienne. Il est possible de construire une extension de la métrique $g^{(0)}$ pour le groupoïde de Lie $M \times M \rightrightarrows M$ des paires de M. Considérons la métrique riemannienne $g^{(1)}$ sur $M \times M$ définie par

$$g^{(1)}_{(p,q)}\left((u_1, u_2), (v_1, v_2)\right) = g^{(0)}_p(u_1, v_1) + g^{(0)}_q(u_2, v_2)$$

et vérifions qu'il s'agit bien d'une 1-métrique.
Soient $p, q, r \in M$ et $u, v, w, z \in T_pM$ tels que

$$T_{(p,q)}s(u, 0) = T_{(p,r)}s(w, 0) \quad \text{et} \quad T_{(p,q)}s(v, 0) = T_{(p,r)}s(z, 0).$$

Ce qui signifie que $u = w$ et $v = z$. On aura alors par la suite

$$g^{(1)}_{(p,q)}\left((u, 0), (v, 0)\right) = g^{(0)}_p\,(u, v) = g^{(0)}_p\,(w, z) = g^{(1)}_{(p,r)}\left((w, 0), (z, 0)\right)$$

et par conséquent $g^{(1)}$ est s-transverse.
Soient maintenant $p, q \in M$, $(u_1, u_2) \in T_pM \times T_qM$ et $(v_1, v_2) \in T_pM \times T_qM$.
On a

$$\begin{aligned} g^{(1)}_{\iota(p,q)}\left(T_{(p,q)}\iota(u_1, u_2), T_{(p,q)}\iota(v_1, v_2)\right) &= g^{(1)}_{(q,p)}\left((u_2, u_1), (v_2, v_1)\right) \\ &= g^{(0)}_q(u_2, v_2) + g^{(0)}_p(u_1, v_1) \\ &= g^{(1)}_{(p,q)}\left((u_1, u_2), (v_1, v_2)\right) \end{aligned}$$

et donc l'inversion ι est une isométrie.

3.2.3 Métrique sur l'espace des flèches composables

Avant d'aborder la notion de métrique riemannienne sur l'ensemble des flèches composables du groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$, commençons par remarquer que chaque point (x, y) de $G^{(2)}$ peut être représenté par un triangle commutatif de flèches, comme le montre la figure suivante

$$\begin{tikzcd}
& t(y) \arrow[dr, bend left, "x"] & \\
s(y) \arrow[ur, bend left, "y"] \arrow[rr, bend right, "x * y"'] & & t(x)
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3.1 – Deux flèches composables

Nous pouvons alors faire agir le groupe de permutations $\mathfrak{S}_3$ sur $G^{(2)}$, en permutant les objets du triangle 3.1. Commençons par noter les éléments du groupe de permutations $\mathfrak{S}_3$ par

$$\mathfrak{S}_3 = \Bigg\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Bigg\}.$$

Si on assigne le numéro 1 à $s(y)$, le 2 à $t(y)$ et le 3 à $t(x)$ dans la figure 3.1, on remarque déjà que la permutation identité σ_6 nous donne le couple (x, y) de $G^{(2)}$ et par conséquent $\sigma_6 \cdot (x, y) = (x, y)$.

Par exemple, la permutation σ_1 nous permet d'obtenir le triangle suivant

$$\begin{tikzcd}
& t(x) \arrow[dr, bend left, "\iota(x)"] & \\
s(y) \arrow[ur, bend left, "x * y"] \arrow[rr, bend right, "y"'] & & t(y)
\end{tikzcd}$$

Ce triangle définit l'action de la permutation σ_1 sur $G^{(2)}$ par $\sigma_1 \cdot (x, y) = (\iota(x), x * y)$.

En répétant le même procédé, on définit complètement l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $G^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_2 \cdot (x, y) &= (\iota(y), \iota(x)) \\
\sigma_3 \cdot (x, y) &= (x * y, \iota(y)) \\
\sigma_4 \cdot (x, y) &= (y, \iota(x * y)) \\
\sigma_5 \cdot (x, y) &= (\iota(x * y), x).
\end{aligned}$$

Au chapitre 2, nous avons construit l'action $\theta^* : (z, (x, y)) \mapsto (x, y * \iota(z))$ du groupoïde $G \rightrightarrows M$ sur l'espace des flèches composables $G^{(2)}$. Voyons que l'on peut encore définir deux autres actions du groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$ sur la variété $G^{(2)}$.

i. La première action, notée θ^s, est de moment $\tau^s : G^{(2)} \to M$, $(x,y) \mapsto s(y)$ et définie sur l'ensemble

$$(G \times_M G^{(2)})_s = \{(z,(x,y)) \in G \times G^{(2)} \mid s(z) = s(y)\}$$

Dans ce cas, l'action en question est définie par

$$\begin{array}{rccc} \theta^s & : & (G \times_M G^{(2)})_s & \longrightarrow & G^{(2)} \\ & & (z,(x,y)) & \longmapsto & (x, y * \iota(z)) \end{array}$$

Soit $(x_0,y_0) \in G^{(2)}$. L'orbite de (x_0,y_0) par l'action θ^s est donnée par

$$\begin{aligned} O_s(x_0,y_0) &= \{\theta^s(z,(x_0,y_0)) \mid s(z) = \tau^s(x_0,y_0)\} \\ &= \{(x_0, y_0 * \iota(z)) \mid s(z) = s(y_0)\} \end{aligned}$$

Montrons que $O_s(x_0,y_0) = \pi_1^{-1}(\{x_0\})$, où $\pi_1 : G^{(2)} \to G$ désigne la première projection.

Comme pour tout $z \in G$ tel que $s(z) = s(y_0)$, $\pi_1(x_0, y_0 * \iota(z)) = x_0$, alors $O_s(x_0,y_0) \subset \pi_1^{-1}(\{x_0\})$.

Réciproquement, soit $(x,y) \in \pi_1^{-1}(\{x_0\})$. Dans ce cas, $(x,y) = (x_0,y)$ et en particulier, $t(y) = t(y_0)$. Posons alors $z = \iota(y) * y_0$. On a donc $y = y_0 * \iota(z)$. D'où $(x,y) = (x_0, y_0 * \iota(z))$ et $s(z) = s(\iota(y) * y_0) = s(y_0)$.

ii. L'autre action, notée θ^t, est de moment $\tau^t : G^{(2)} \to M$, $(x,y) \mapsto t(x)$ et définie sur l'ensemble

$$(G \times_M G^{(2)})_t = \{(z,(x,y)) \in G \times G^{(2)} \mid s(z) = t(x)\}$$

Dans ce cas, l'action en question est définie par

$$\begin{array}{rccc} \theta^t & : & (G \times_M G^{(2)})_t & \longrightarrow & G^{(2)} \\ & & (z,(x,y)) & \longmapsto & (z * x, y) \end{array}$$

Soit $(x_0,y_0) \in G^{(2)}$. L'orbite de (x_0,y_0) par l'action θ^t est donnée par

$$\begin{aligned} O_t(x_0,y_0) &= \{\theta^t(z,(x_0,y)_0) \mid s(z) = \tau^t(x_0,y_0)\} \\ &= \{(z * x_0, y_0) \mid s(z) = t(x_0)\} \end{aligned}$$

Montrons que $O_t(x_0,y_0) = \pi_2^{-1}(\{y_0\})$, où $\pi_2 : G^{(2)} \to G$ désigne la deuxième projection.

Comme pour tout $z \in G$ tel que $s(z) = t(x_0)$, $\pi_2(z * x_0, y_0) = y_0$, alors $O_t(x_0,y_0) \subset \pi_2^{-1}(\{y_0\})$.

Réciproquement, soit $(x,y) \in \pi_2^{-1}(\{y_0\})$. Dans ce cas, $(x,y) = (x,y_0)$ et en particulier, $s(x) = s(x_0)$. Posons alors $z = x * \iota(x_0)$. On a donc $x = z * x_0$. D'où $(x,y) = (z * x_0, y_0)$ et $s(z) = s(x * \iota(x_0)) = s(\iota(x_0)) = t(x_0)$.

Voyons maintenant que l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur G nous permet de passer d'une action θ^s, θ^* et θ^t à une autre.

Pour se faire, nous allons d'abord commencer par schématiser ces trois action par rapport à la valeur de $s(z)$ dans chaque cas :

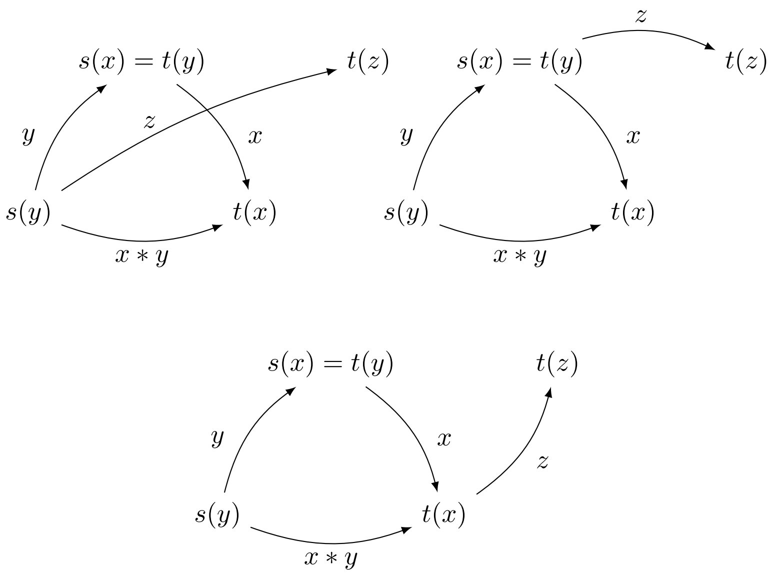
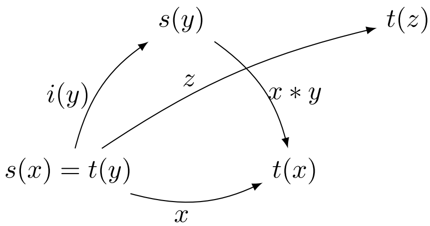


FIGURE 3.2 – Schéma des actions θ^s, θ^* et θ^t respectivement

On se propose d'obtenir l'action θ^* à partir de l'action θ^s. La démarche est identique pour tous les autres cas.

Dans le schéma de θ^*, nous allons permuter les objets de telle sorte à ce qu'il devienne identique au schéma de θ^s. Nous obtenons alors le nouveau schéma suivant :



Dans ce cas, nous avons utilisé la permutation σ_3 pour obtenir le nouveau schéma. Enfin, pour obtenir exactement le schéma de θ^*, on échange les objets $s(y)$ et $t(y)$ par l'inverse de la permutation σ_3, c'est-à-dire elle-même.

Grâce à cette démarche, nous sommes en mesure d'affirmer que pour tout $(x, y) \in G^{(}2)$ et tous $z \in G$ tel que $s(z) = s(x) = t(y)$.

$$\theta^*(z, (x, y)) = \sigma_3 \cdot (\theta^s(z, \sigma_3 \cdot (x, y)))$$

Vérifions ce résultat par le calcul

$$\begin{aligned} \sigma_3 \cdot (\theta^s(z, \sigma_3 \cdot (x, y))) &= \sigma_3 \cdot (\theta^s(z, (x * y, \iota(y)))) \\ &= \sigma_3 \cdot (x * y, \iota(y) * \iota(z)) \\ &= (x * \iota(z), z * y) \\ &= \theta^*(z, (x, y)) \end{aligned}$$

Remarquons, toutefois, qu'il existe plusieurs façons d'interchanger ces trois actions. Mais, nous allons nous contenter des interactions suivantes

$$\theta^t(z,(x,y)) = \sigma_1 \cdot (\theta^*(z, \sigma_1 \cdot (x,y))) \tag{3.1}$$

$$\theta^s(z,(x,y)) = \sigma_2 \cdot (\theta^t(z, \sigma_2 \cdot (x,y))) \tag{3.2}$$

$$\theta^*(z,(x,y)) = \sigma_3 \cdot (\theta^s(z, \sigma_3 \cdot (x,y))) \tag{3.3}$$

Définition 3.2.3. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie.
Une **2-métrique** sur $G \rightrightarrows M$ est une métrique riemannienne, notée $g^{(2)}$, sur la variété $G^{(2)}$ telle que

i. $g^{(2)}$ est transversalement θ^*-invariante ;

ii. Pour tout $i \in \{1, \cdots, 6\}$, l'application $\omega_i : G^{(2)} \to G^{(2)}$, $(x,y) \mapsto \sigma_i \cdot (x,y)$ est une isométrie.

Le couple ($G \rightrightarrows M$, $g^{(2)}$) est appelé **groupoïde riemannien**.

En utilisant les précédentes remarques, la proposition qui suit nous permet de formuler des définitions de groupoïde riemannien équivalentes à la définition 3.2.3.

Proposition 3.2.4. *Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie et $g^{(2)}$ une métrique riemannienne sur la variété $G^{(2)}$. Alors, il y a équivalence entre*

i. La métrique $g^{(2)}$ est une 2-métrique ;

ii. $g^{(2)}$ est transversalement invariante pour l'une des actions θ^s et θ^t et pour tout $i \in \{1, \cdots, 6\}$, l'application $\omega_i : G^{(2)} \to G^{(2)}$, $(x,y) \mapsto \sigma_i \cdot (x,y)$ est une isométrie ;

iii. $g^{(2)}$ est transverse pour l'une des applications $*$, π_1 et π_2 pour tout $i \in \{1, \cdots, 6\}$, l'application $\omega_i : G^{(2)} \to G^{(2)}$, $(x,y) \mapsto \sigma_i \cdot (x,y)$ est une isométrie.

Preuve.
i. $\Rightarrow$ ii. Montrons que $g^{(2)}$ est transversalement invariante pour l'action θ^s. La démonstration pour l'autre action est analogue.
Soit λ^s la représentation normale du groupoïde d'action $(G \times G^{(2)})_s \rightrightarrows G^{(2)}$.
Soit $(x_0, y_0) \in G^{(2)}$, on a

$$G_{O_s(x_0,y_0)} = \{(z,(x,y)) \in G \times G^{(2)} \,|\, x = x_0\}.$$

Soit donc $(z,(x_0,y)) \in G_{O_*(x_0,y_0)}$.
Montrons que l'application $\lambda^*_{(z,(x_0,y))} : N_{(x_0,y)}O_s(x_0,y_0) \to N_{(x_0,y*\iota(z))}O_s(x_0,y_0)$ est une isométrie. Pour se faire, considérons λ^* la représentation normale du groupoïde d'action $(G \times G^{(2)})_* \rightrightarrows G^{(2)}$ qui est une isométrie puisque $g^{(2)}$ est une 2-métrique.
D'après l'égalité 3.3, l'application $\omega_3 : G^{(2)} \to G^{(2)}$, $(x,y) \mapsto \sigma_3 \cdot (x,y)$ est un difféomorphisme de $O_s(x_0,y_0)$ dans $O_*(x_0,y_0)$ et un difféomorphisme de $O_*(x_0,y_0)$ dans $O_s(x_0,y_0)$. C'est de plus une isométrie puisque $g^{(2)}$ est une 2-métrique.
Dans ce cas, nous avons

$$\lambda^s_{(z,(x_0,y))} = T_{\sigma_3 \cdot (z, \sigma_3 \cdot (x_0,y))}\omega_3 \circ \lambda^*_{(z, \sigma_3 \cdot (x_0,y))} \circ T_{(z,(x_0,y))}\omega_3,$$

ce qui fait de $\lambda^*_{(z,(x,y))}$ la composée d'isométries et est donc elle-même une isométrie.

ii. $\Rightarrow$ iii. Supposons que $g^{(2)}$ est transversalement invariante pour l'action θ^t et montrons qu'elle est π_2-transverse. La démonstration est identique pour les autres cas.

Comme $g^{(2)}$ est transversalement θ^t-invariante, alors la représentation normale du groupoïde d'action $(G \times G^{(2)})_t \rightrightarrows G^{(2)}$ définit une isométrie. D'un autre côté, remarquons que pour la submersion $\pi_2 : G^{(2)} \to G$,

$$\begin{aligned} G^{(2)} \times_G G^{(2)} &= \{((x,y),(z,w)) \in G^{(2)} \times G^{(2)} \,|\, \pi_2(x,y) = \pi_2(z,w)\} \\ &= \{((x,y),(z,w)) \in G^{(2)} \times G^{(2)} \,|\, y = w\} \\ &= \{((x,y),(z,y)) \,|\, s(x) = t(y) = s(z)\} \end{aligned}$$

Comme le difféomorphisme $((x,y),(z,y)) \mapsto (z,(x,y))$ identifie la variété $G^{(2)} \times_G G^{(2)}$ à la variété $(G \times_M G^{(2)})_*$, et comme le difféomorphisme $(z,(x,y)) \mapsto (z, \sigma_1 \cdot (x,y))$ identifie la variété $(G \times_M G^{(2)})_*$ à la variété $(G \times_M G^{(2)})_t$, on déduit que $g^{(2)}$ peut être vue comme une 0-métrique pour le groupoïde $G^{(2)} \times_G G^{(2)} \rightrightarrows G^{(2)}$ de la submersion π_2. Ce qui, d'après la proposition 3.2.2, implique que $g^{(2)}$ est π_2-transverse.

iii. $\Rightarrow$ i. Si $g^{(2)}$ est transverse pour la submersion $*$, alors un argument analogue à celui donné à l'implication précédente peut être utilisé dans ce cas car la proposition 3.2.2 est une équivalence. De même, si $g^{(2)}$ est π_2-transverse, et comme $G \times_G G^{(2)}$ est identifié à $(G \times_M G^{(2)})_*$ alors $g^{(2)}$ s'identifie à une 0-métrique du groupoïde $G^{(2)} \times_G G^{(2)} \rightrightarrows G^{(2)}$ de la submersion π_2. Ce qui en fait une métrique transversalement invariante pour l'action θ^s.
Les autres cas se traitent de manières analogue en faisant les identifications nécessaires à l'aide des permutations. ✠

Théorème 3.2.1. *Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie. Une 2-métrique $g^{(2)}$ sur $G^{(2)}$ induit une 1-métrique $g^{(1)}$ sur G (et par conséquent une 0-métrique $g^{(0)}$ sur M).*

Démonstration.
Comme la métrique $g^{(2)}$ est π_1-transverse, grâce à la proposition 1.2.1, il existe sur G une métrique riemannienne unique h telle que pour tout $(x,y) \in G^{(2)}$ et tous $u, v \in T_xG$,

$$h_x(u,v) = h_x\left(T_{(x,y)}\pi_1(u,u'), T_{(x,y)}\pi_1(v,v')\right) = g^{(2)}_{(x,y)}((u,u'),(v,v')).$$

où $(u,u') \in N_{(x,y)}\pi_1^{-1}(\{\pi_1(x,y)\})$ et $(v,v') \in N_{(x,y)}\pi_1^{-1}(\{\pi_1(x,y)\})$.
De plus, comme la métrique $g^{(2)}$ est π_2-transverse, grâce à la proposition 1.2.1, il existe sur G une métrique riemannienne unique k telle que pour tout $(x,y) \in G^{(2)}$ et tous $\tilde{u}, \tilde{v} \in T_yG$,

$$k_y(\tilde{u},\tilde{v}) = k_y\left(T_{(x,y)}\pi_2(\tilde{u}',\tilde{u}), T_{(x,y)}\pi_2(\tilde{v}',\tilde{v})\right) = g^{(2)}_{(x,y)}((\tilde{u}',\tilde{u}),(\tilde{v}',\tilde{v})).$$

où $(\tilde{u}',\tilde{u}) \in N_{(x,y)}\pi_2^{-1}(\{\pi_2(x,y)\})$ et $(\tilde{v}',\tilde{v}) \in N_{(x,y)}\pi_2^{-1}(\{\pi_2(x,y)\})$.
Enfin, comme la métrique $g^{(2)}$ est κ-transverse, grâce à la proposition 1.2.1, il existe

sur G une métrique riemannienne unique l telle que pour tout $(x,y) \in G^{(2)}$ et tous $\mu, \nu \in T_{x*y}G$,

$$l_{x*y}(\mu,\nu) = l_{x*y}(T_{(x,y)}\kappa(\mu_1,\mu_2), T_{(x,y)}\kappa(\nu_1,\nu_2)) = g^{(2)}_{(x,y)}((\mu_1,\mu_2),(\nu_1,\nu_2))$$

où $\mu = T_{(x,y)}\kappa(\mu_1,\mu_2)$ avec $(\mu_1,\mu_2) \in N_{(x,y)}\kappa^{-1}(\{x*y\})$ et $\nu = T_{(x,y)}\kappa(\nu_1,\nu_2)$ avec $(\nu_1,\nu_2) \in N_{(x,y)}\kappa^{-1}(\{x*y\})$.
Comme pour tout $i \in \{1,\cdots,6\}$, $\omega_i : G^{(2)} \to G^{(2)}$, $(x,y) \mapsto \sigma_i \cdot (x,y)$ est une isométrie et que $\pi_2 = \pi_1 \circ \omega_4$ et $\kappa = \pi_2 \circ \omega_1$, alors les métriques h, k et l concordent les unes avec les autres et correspondent donc à une unique métrique que l'on va noter $g^{(1)}$.
Montrons que c'est bien une 1-métrique.
Tout d'abord, soient $u, v \in T_xG$.
Il existe alors deux uniques vecteurs u' et v' avec $(u,u') \in N_{(x,y)}\pi_1^{-1}(\{x\})$ et $(v,v') \in N_{(x,y)}\pi_1^{-1}(\{x\})$ tels que $u = T_{(x,y)}\pi_1(u,u')$ et $v = T_{(x,y)}\pi(v,v')$.
Alors $T_x\iota(u) = T_{(x,y)}(\iota \circ \pi_1)(u,u')$ et $T_x\iota(v) = T_{(x,y)}(\iota \circ \pi_1)(v,v')$.
Ensuite, remarquons que $\iota \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \omega_2$. On aura donc

$$\begin{aligned}
g^{(1)}_{\iota(x)}(T_xi(u), T_xi(v)) &= g^{(1)}_{\iota(x)}(T_{(x,y)}(\iota \circ \pi_1)(u,u'), T_{(x,y)}(\iota \circ \pi_1)(v,v')) \\
&= g^{(1)}_{\iota(x)}(T_{(x,y)}(\pi_2 \circ \omega_2)(u,u'), T_{(x,y)}(\pi_2 \circ \omega_2)(v,v')) \\
&= g^{(2)}_{(\iota(y),\iota(x))}(T_{(x,y)}\omega_2(u,u'), T_{(x,y)}\omega_2(v,v')) \\
&= g^{(2)}_{(x,y)}((u,u'),(v,v')) \\
&= g^{(1)}_x(u,v)
\end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité vient du fait que ω_2 est une isométrie et l'égalité juste avant, de la définition de la métrique $g^{(1)}$. Ce qui fait de l'inversion ι une isométrie.
Il ne reste plus qu'à montrer que $g^{(1)}$ est transverse à la source s.
Soient $x, y \in G$ tels que $s(x) = s(y)$.
Soient $u, v \in N_xs^{-1}(\{s(x)\})$ et $\tilde{u}, \tilde{v} \in N_ys^{-1}(\{s(y)\})$ tels que

$$T_xs(u) = T_ys(\tilde{u}) \quad \text{et} \quad T_xs(v) = T_ys(\tilde{v}).$$

On sait qu'il existe deux uniques vecteurs u' et v' tels que $(u,u') \in N_{(x,\iota(y))}\pi_1^{-1}(\{\pi_1(x,i(y))\})$ et $(v,v') \in N_{(x,\iota(y))}\pi_1^{-1}(\{\pi_1(x,i(y))\})$. On a alors

$$\begin{aligned}
g^{(1)}_x(u,v) &= g^{(1)}_x(T_{(x,\iota(y))}\pi_1(u,u'), T_{(x,\iota(y))}\pi_1(v,v')) \\
&= g^{(2)}_{(x,\iota(y))}((u,u'),(v,v')) \\
&= g^{(2)}_{\sigma\cdot(x,\iota(y))}(T_{(x,\iota(y))}\omega_2(u,u'), T_{(x,\iota(y))}\omega_2(v,v')) \\
&= g^{(2)}_{(y,\iota(x))}((T_{\iota(y)}\iota(u'), T_x\iota(u)), (T_{\iota(y)}\iota(v'), T_x\iota(v))) \\
&= g^{(1)}_y(T_{\iota(y)}\iota(u'), (T_{\iota(y)}\iota(v'))
\end{aligned}$$

Comme $\pi_1^{-1}(\{x\})$ s'identifie à $t^{-1}(\{s(x)\})$, alors $T_{(x,\iota(y))}\pi_1^{-1}(\{x\})$ s'identifie à $T_{\iota(y)}t^{-1}(\{s(x)\})$ et donc $N_{(x,\iota(y))}\pi_1^{-1}(\{x\})$ s'identifie à $N_{\iota(y)}t^{-1}(\{s(x)\})$. De plus, remarquons que $T_{\iota(y)}\iota(N_{\iota(y)})t^{-1}(\{s(x)\}) = N_ys^{-1}(\{s(x)\})$. Enfin, comme on a

$$T_ys(T_{\iota(y)}\iota(u')) = T_y(s \circ \iota)(u') = T_{\iota(y)}t(u') = T_xs(u),$$

alors on peut poser $\tilde{u} = T_{\iota(y)}\iota(u')$. Un argument analogue permet de poser $\tilde{v} = T_{\iota(y)}\iota(v')$, d'où

$$g_x^{(1)}(u,v) = g_y^{(1)}(\tilde{u},\tilde{v})$$

✠

Par conséquent, étant donnée une 2-métrique sur le groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$, on peut trouver une métrique induite sur G et une autre sur M telles que les cinq application suivantes soient des submersions riemanniennes

$$\begin{tikzcd} G^{(2)} \arrow[r, shift left=2, "\pi_1"] \arrow[r, "\kappa"] \arrow[r, shift right=2, "\pi_2"'] & G \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & M \end{tikzcd}$$

De plus, les métriques $g^{(2)}$ et $g^{(1)}$ sont préservées par les actions naturelles des groupes symétriques $\mathfrak{S}_3$ sur $G^{(2)}$ et $\mathfrak{S}_2$ sur G.

Dans ce contexte aussi, nous allons nous demander si une 1-métrique peut être étendue à une 2-métrique. L'exemple que voici présente un cas où cela est possible.

Exemple 24. Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $g^{(1)}$ une 1-métrique sur le groupoïde de Lie $M \times M$ des paires de M. Il est possible de construire une extension de la métrique $g^{(1)}$ pour le groupoïde $M \times M \rightrightarrows M$. Considérons la métrique $g^{(2)}$ sur $(M \times M)^{(2)}$ identifié à $M \times M \times M$ définie par

$$\begin{aligned} g^{(2)}_{(p,q,r)}\left((u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)\right) = g^{(1)}_{(p,q)}((u_1,u_2),(v_1,v_2)) + g^{(1)}_{(q,r)}((u_2,u_3),(v_2,v_3)) \\ + g^{(1)}_{(r,p)}((u_3,u_1),(v_3,v_1)). \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une 2-métrique. En effet, de manière analogue à l'exemple 23, on montre que $g^{(2)}$ est transverse pour $\pi_1 : M \times M \times M \to M$, $((p,q),r) \mapsto (p,q)$ et que les $\omega_i : (M \times M)^{(2)} \to (M \times M)^{(2)}$, $i \in \{1, \cdots, 6\}$ sont des isométries.

Bibliographie

[1] BRANDT, H. Über eine verallgemeinerung des gruppenbegriffes. *Mathematische Annalen* (1926).

[2] BROWN, R. From groups to groupoids : A brief survey. *Mathematics Subject Classification* (1980).

[3] CARTIER, P. Groupoïdes de lie et leurs algébroïdes. *Séminaire BOURBAKI* (2008).

[4] DEL HOYO, M. L. Lie groupoids and their orbispaces. *Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal.* (2013).

[5] DEL HOYO, M. L., AND FERNANDES, R. L. Riemannian metrics on Lie groupoids. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (2015).

[6] DO CARMO, M. P. *Riemannian geometry.* Birkhäuser, 1992.

[7] DUFOUR, J.-P., AND ZUNG, N. T. *Poisson structures and their normal forms.* Birkhaüser, 2005.

[8] GALLEGO, E., GUALANDRI, L., HECTOR, G., AND REVENTOS, A. Groupoïdes riemanniens. *Publications mathématiques 43* (1999), 417 – 422.

[9] GALLIER, J., AND QUAINTANCE, J. Notes on differentiable geometry and Lie groups. *Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, Philadelphia,USA* (2017).

[10] GALLOT, S., HULAIN, D., AND LAFONTAINE, J. *Riemannian geometry.* Springer, 2004.

[11] GEIS, M. L. Notes on the riemannian geometry of Lie groups. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal* (2014).

[12] IVAN, G. Principal fiber bundles with structural Lie groupoids. *Balcan Journal of Geometry and its applications 6*, 2 (2001), 39 – 48.

[13] JOST, J. *Riemannian geometry and riemannian analysis.* Springer, 2011.

[14] LEE, J. M. *Riemannian manifolds : An introdution to curvature.* Springer, 1997.

[15] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds.* Springer, 2006.

[16] MACKENZIE, K. C. H. *General theory of Lie groupoids.* Cambridge University Press, 2005.

[17] MARLE, C.-M. Lie, symplectic and Poisson groupoids and their Lie algebroids. *Université Pierre et Marie Curie, Paris, France.* (2014).

[18] Marle, C.-M. The works of Charles Ehresmann on connections : from Cartan connections to connections on fibre bundles. *Banach Center Publications 76* (2014).

[19] Mayers, S. B., and Steenrod, N. E. The group of isometries of a riemannian manifold. *Annals of mathematics 40*, 2 (Avril 1939), 400 – 416.