Table des matières

Introduction

Lorsqu'on fait agir un groupe topologique G sur un espace topologique X, on munit l'espace des orbites $X/G = \{G \cdot x \,|\, x \in X\}$ de la topologie quotient qui est la plus fine des topologies pour laquelle la surjection canonique $X \to X/G$ est continue. L'espace des orbites X/G est alors lui aussi un espace topologique que l'on appelle *quotient géométrique*. Si X possède une certaine propriété géométrique, on peut alors se demander si X/G possède lui aussi une telle propriété. Cela peut être vrai dans certains cas, par exemple si X est de Hausdorff et que l'action de G sur X est propre alors X/G est lui aussi de Hausdorff. Par conséquent, l'espace des orbites peut avoir de bonnes propriétés géométriques pour un certain type d'actions.

Étant donné un groupe algébrique affine G agissant sur une variété algébrique X, la *Théorie des Invariants Géométriques*(GIT), telle qu'elle a été développée par Mumford dans [11], a pour but de construire un *bon quotient*, c'est-à-dire une application $\varphi : X \to Y$ constante sur les orbites pour l'action d'une certaine classe de groupes qui satisfait certaines propriété universelles. Dans cette perspective, ce quotient ne sera pas un espace d'orbites.

Si $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ est une variété affine sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ définie comme lieu d'annulation des polynômes $f_1, \cdots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$, alors son anneau de coordonnées $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]/ < f_1, \cdots, f_s >$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de type fini de fonctions régulières sur X. L'action d'un groupe algébrique affine G sur X induit une action de G sur l'algèbre $\mathbb{K}[X]$. Pour tout morphisme de variétés affines $f : X \to Y$ constant sur les orbites, l'image du morphisme d'anneaux associé $f^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ est contenu dans l'anneau $\mathbb{K}[X]^G$ des fonctions régulières invariantes par l'action de G. On se demande alors si $\mathbb{K}[X]^G$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de type fini de telle sorte qu'elle soit l'algèbre des fonctions régulière d'une certaine variété affine. Ce problème classique de la théorie des invariants géométriques a été étudié par Hilbert pour $G = GL_n(\mathbb{C})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ pour lesquels il a répondu à la question par l'affirmative. Connu sous le nom de $14^{\text{ième}}$ problème de Hibert, Nagata y a toutefois apporté une réponse négative en donnant un contre-exemple pour d'une action pour laquelle l'algèbre des fonctions régulières invariantes n'était pas de type fini. Ce n'est que bien plus tard, qu'il a été montré que dans le cas des groupes dits *réductifs*, la sous-algèbre était toujours de type fini.

Le premier chapitre a pour objet de définir les groupes réductifs, cette classe de groupes pour laquelle la théorie des invariants géométrique fonctionne. On en donne, par la suite, une caractérisation valable lorsque le corps de base $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, c'est la notion de groupes linéairement réductifs. Enfin, on répond au $14^{\text{ième}}$ problème de Hilbert par le théorème dit de Hilbert-Nagata lorsqu'on a une action de groupe réductif.

Au second chapitre, on introduit les outils de base de la théorie des invariants géométriques à savoir la notion de bon quotient et de quotient géométrique. Remarquons, au passage, que la théorie des invariants géométriques existe pour n'importe quelle variété algébrique. Toutefois, dans le cadre de ce travail, nous porterons notre attention sur le cas affine qui est d'un intérêt particulier, puisqu'il sert de guide à l'approche générale. En effet, on sait que toute variété algébrique est construite à partir de recollement de variétés algébriques affines. La théorie générale est donc obtenue par recollement de la théorie affine.

Ce travail s'inspire principalement de l'article [4] de Victoria Hoskins. Nous allons, par la suite, utiliser un caractère $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ afin de relever l'action d'un groupe réductif G sur une variété affine X au fibré trivial $L = X \times \mathbb{K}$. Dans cette situation, on a alors une action induite sur l'ensemble des sections $\Gamma(X, L)$ du fibré L. Cette action nous permet définir l'ensemble des sections invariantes $\Gamma(X, L)^G$ qui est une sous-algèbre graduée de l'algèbre des sections. Le morphisme d'inclusion donne alors une application rationnelle dont l'ouvert de définition est l'ensemble des points *semi-stables* de X par rapport au caractère χ. En particulier, on considère l'ouvert de points stables par rapport au caractère χ et on aura un quotient géométrique. Enfin, on donne des critères topologiques et numériques de (semi-)stabilité.

Au troisième chapitre, on étudie le cône nul N qui est l'ensemble des points instables de X par rapport au caractère χ. On construit alors une décomposition en réunion finie, disjointe de sous-ensembles invariants par l'action de G indexé par des éléments sur lesquels on a définit un certain ordre. Une telle décomposition est appelée *stratification*.

Enfin, au quatrième et dernier chapitre, en s'inspirant du travail de King dans [8], on étudie la notion de semi-stabilité dans le cadre des carquois, qui est une structure d'un grand intérêt en géométrie algébrique.

Conventions et notations

Dans tout ce document, on adoptera les conventions et notations suivantes :

- $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro ;
- $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ de déterminant non nul ;
- $SL_n(\mathbb{K}) = \{g \in GL_n(\mathbb{K}) \,|\, det(g) = 1\}$;
- $U_n(\mathbb{K}) = \{u = (u_{ij}) \in GL_n(\mathbb{K}) \,|\, \forall i > j, u_{ij} = 0 \text{ et } \forall i, u_{ii} = 1\}$;
- $\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{K} \backslash \{0\}$ est le groupe multiplicatif ;
- $\mathbb{G}_a \simeq \mathbb{K}$ est le groupe additif ;
- G_x est le stabilisateur d'un élément $x \in X$ pour l'action d'un groupe G.
- $G \cdot x$ est l'orbite d'un élément $x \in X$ pour l'action d'un groupe G.
- $X/G = \{G \cdot x \,|\, x \in X\}$ est l'ensemble des orbites.

1
Groupes réductifs

1.1 Groupes semi-simples et réductifs

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux groupes semi-simples et aux groupes réductifs ainsi qu'à leurs représentations. On terminera en démontrant le théorème de Hilbert-Nagata sur les invariants des actions de groupes réductifs.

Définition 1.1.1.

- Un groupe algébrique affine G est dit *semi-simple* si tout sous-groupe fermé, distingué, résoluble et connexe de G est trivial.
- Un groupe algébrique affine G est dit *réductif* si tout sous-groupe distingué et unipotent de G est trivial.

Remarque. Tout groupe semi-simple est en particulier réductif. Cela provient du fait qu'un sous-groupe unipotent est fermé, résoluble et connexe.

Lemme 1.1.2. *Soit G un groupe algébrique affine connexe. Alors*

i. Si G est semi-simple, alors G est égal à son groupe dérivé $\mathcal{D}(G)$;

ii. Si G est réductif, alors son groupe dérivé $\mathcal{D}(G)$ est semi-simple.

Preuve. Voir [13] (Remarque et exemples 27.2.3). ✠

Proposition 1.1.3. *Un groupe algébrique affine connexe G est semi-simple si, et seulement si, le seul sous-groupe fermé, distingué, connexe, commutatif et distingué de G est le singleton $\{e\}$.*

Preuve.

$\Longrightarrow$ Évident, car un tel sous-groupe est fermé, distingué, résoluble et connexe. Comme G est semi-simple, ce sous-groupe est alors trivial.

$\Longleftarrow$ Soit H sous-groupe fermé, distingué, résoluble, connexe et non-trivial. Le dernier terme non-trivial de la série dérivée $\mathcal{D}^n(H)$ est donc un sous-groupe fermé connexe et commutatif. Mais, par hypothèse, un tel groupe est trivial. Contradiction.

✠

Exemple 1. Le groupe général linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ est réductif. En effet, remarquons tout d'abord que, par le théorème de Lie-Kolchin, tout sous-groupe unipotent de $GL_n(\mathbb{K})$ est conjugué à $U_n(\mathbb{K})$.

Soit $u \in U_n(\mathbb{K})$. Supposons que pour tout $g \in GL_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice $v \in U_n(\mathbb{K})$ telle que $gu = vg$. Montrons alors que $u = I_n$. Pour cela, calculons $(gu)_{nj}$ et $(vg)_{nj}$ où $j \in \{1 \cdots n\}$.

$$(gu)_{nj} = \sum_{k=1}^{n} g_{nk}u_{kj} = g_{nj} + \sum_{k<j} g_{nk}u_{kj}$$

car $u_{jj} = 1$ et $u_{kj} = 0$ pour $k > j$. De plus,

$$(vg)_{nj} = \sum_{l=1}^{n} v_{nl}g_{lj} = g_{nj} + \sum_{l=1}^{n-1} v_{nl}g_{lj} = g_{nj}$$

car $v_{nn} = 1$ et $v_{nl} = 0$ pour $l < n$.
L'égalité $(gu)_{nj} = (vg)_{nj}$ implique que

$$g_{nj} + \sum_{k<j} g_{nk}u_{kj} = g_{nj}$$

Donc

$$\sum_{k<j} g_{nk}u_{kj} = 0$$

La matrice g étant arbitraire, alors on a forcément $u_{kj} = 0$ pour tout $k < j$. Ce qui implique qu'au dessus de la diagonale de la matrice u, il n'y a que des zéros. D'où $u = I_n$.

Enfin, remarquons qu'en particulier pour $n = 1$, $\mathbb{G}_m \simeq GL_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\backslash\{0\}$ et donc le groupe multiplicatif est réductif.

Exemple 2. Le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{K}) = \{g \in GL_n(\mathbb{K}) \,/\, det(g) = 1\}$ est un groupe semi-simple. En effet, comme $\mathcal{D}(GL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$ et d'après l'exemple 1, $GL_n(\mathbb{K})$ est réductif, alors grâce au lemme 1.1.2, on conclut que $SL_n(\mathbb{K})$ est semi-simple.

Exemple 3. Le produit de groupes réductifs est un groupe réductif. En particulier, un tore algébrique $\mathbb{T} \simeq \mathbb{G}_m^n$ est un groupe réductif.

1.2 Groupes linéairement réductifs

Commençons par un rappel de notions générales sur les représentations.

Définition 1.2.1. Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, G un groupe algébrique affine et $\tau : G \to GL(V)$ un morphisme de groupes algébriques affines. On dit que

i. Le morphisme τ est une *représentation* de G sur V et que V est un *G-module rationnel* ;

ii. Le sous-espace vectoriel $W \subset V$ est *G-invariant* si pour tout $g \in G$,

$$\tau(g)(W) \subset W;$$

iii. Le G-module rationnel V est *irréductible* si V ne contient pas de sous-espaces vectoriels G-invariants à part $\{0\}$ et V.

Remarque.

- De manière équivalente, V est un G-module si l'action

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \longrightarrow & V \\ (g, v) & \longmapsto & g \cdot v = \tau(g)(v) \end{array}$$

  est un morphisme de variétés algébriques affines. Dans ce cas, on dira que le groupe G agit *morphiquement* sur V.
- Si $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel G-invariant, alors G agit morphiquement sur W et on peut corestreindre le morphisme τ à $GL(W)$. On note cela par $\tau_{|W} : G \to GL(W)$.

Définition 1.2.2. Un groupe algébrique affine G est dit *linéairement réductif* si pour tout G-module rationnel V, il existe des sous-espaces vectoriels $V_1, \cdots, V_r$ de V tels que :

i. $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$;

ii. $\forall i \in \{1, \cdots, r\}$, V_i est un G-module rationnel, G-invariant et irréductible ;

iii. $\tau = \tau_{|V_1} \oplus \cdots \oplus \tau_{|V_r}$.

Proposition 1.2.3. *Soit G un groupe algébrique affine. Il y a équivalence entre :*

i. Le groupe G est linéairement réductif ;

ii. Pour tout G-module rationnel V, tout sous-espace G-invariant $W \subset V$ possède un supplémentaire G-invariant.

iii. Pour tout G-module rationnel V et tout point $v \in V \backslash \{0\}$ fixé par l'action de G, il existe un polynôme homogène $f \in \mathbb{K}[V]^G$ de degré 1 tel que $f(v) \neq 0$.

Preuve*.*

i. $\Longrightarrow$ ii. Supposons que le groupe G soit linéairement réductif.

Soit V un G-module rationnel et W un sous-espace G-invariant. Par hypothèse, le G-module rationnel V se décompose en une somme directe d'irréductibles :

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r.$$

Comme pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, V_i est irréductible, alors on a

$$W \cap V_i = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ V_i \end{array} \right. .$$

Donc l'espace $Z = \bigoplus_{i / W \cap V_i = 0} V_i$ est supplémentaire à W et G-invariant.

ii. $\Longrightarrow$ i. Soit $\tau : G \to GL(E)$ une représentation linéaire de dimension finie. Considérons $\tilde{F}$ la somme de tous les sous-modules irréductibles de E. Par hypothèse, ce sous-module possède un supplémentaire que l'on note F. Supposons par l'absurde que $\tilde{F} \neq E$. Cela signifie que $F \neq \{0\}$. Mais, comme tout module contient un sous-module irréductible, alors F contient un sous-module irréductible. Ce qui est impossible par définition même de $\tilde{F}$ et donc $F = \{0\}$. D'où $E = \tilde{F}$ et donc E est somme directe de sous-modules irréductibles.

ii. $\Longrightarrow$ iii. Soient V un G-module rationnel et $v \in V\backslash\{0\}$ tel que pour tout $g \in G$, $g \cdot v = v$. Le sous-espace $\mathbb{K}v$ de V est G-invariant et donc, par hypothèse, il possède un supplémentaire que l'on note W. Cela nous permet de définir la projection $f : V \to \mathbb{K}v$ qui est clairement G-invariante et linéaire. Donc elle correspond à polynôme homogène G-invariant de degré 1. De plus $f(v) = v \neq 0$.

iii. $\Longrightarrow$ ii. Soit V un G-module rationnel. Soit W un sous-espace G-invariant de V. L'espace $\mathrm{Hom}(W, V)$ est un G-module rationnel dont le dual est $\mathrm{Hom}(V, W)$. En fait, nous avons

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(W,V) \times \mathrm{Hom}(V,W) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (f,g) & \longmapsto & \mathrm{Tr}(f \circ g) \end{array}$$

où $\mathrm{Tr}(f \circ g)$ est la trace de $f \circ g \in \mathrm{End}(V)$.
Considérons $f \in \mathrm{Hom}(W, V)^G$ l'inclusion. D'après iii., il existe $g \in \mathrm{Hom}(V, W)^G$ tel que $\mathrm{Tr}(g \circ f) \neq 0$. Comme W est irréductible et $g \circ f \in \mathrm{End}(W)^G$, alors par le lemme de Schur ([13] Proposition 10.7.2.(ii)), $g \circ f$ est nécessairement un multiple non-nul de l'identité. On peut alors écrire $V = W \oplus Z$ où $Z = \ker(g)$.
Maintenant, si W n'est pas irréductible, soit $W' \subset W$ un sous-espace G-invariant irréductible. D'après le raisonnement ci-dessus, on sait que $V = W' \oplus Z'$ où Z' est un supplémentaire G-invariant. De plus, on a

$$W = W \cap V = W \cap (W' \oplus Z') = W' \oplus (W \cap Z').$$

Par hypothèse d'induction, $W \cap Z'$ possède un supplémentaire G-invariant Z dans Z'. On obtient alors

$$V = W' \oplus Z' = W' \oplus ((W \cap Z') \oplus Z) = (W' \oplus (W \cap Z')) \oplus Z = W \oplus Z.$$

✠

Exemple 4. Tout groupe fini est linéairement réductif. En effet, soit G un groupe fini et V un G-module rationnel. Soit $W \subsetneq V$ un sous-espace G-invariant de V. D'après la proposition 1.2.3, il suffit de trouver un supplémentaire à W qui est G-invariant.

On fixe un supplémentaire Z de W qui nous donne une projection $\pi : V \to W$. On définit alors l'application

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\pi} : & V & \longrightarrow & W \\ & v & \longmapsto & \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot v) \end{array}$$

Il est évident que l'application $\tilde{\pi}$ est linéaire. Elle est aussi équivariante par l'action de G, en effet pour $g_0 \in G$ et $v \in V$, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(g_0 \cdot v) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot (g_0 \cdot v)) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \cdot \pi((g_0^{-1}g)^{-1} \cdot v)) \\
&= \frac{1}{|G|} g_0 \cdot \sum_{g\in G} (g_0^{-1}g) \cdot \pi((g_0^{-1}g)^{-1} \cdot v)) \\
&= g_0 \cdot \tilde{\pi}(v)
\end{aligned}$$

De plus, elle est surjective car pour $w \in W$, on a

$$\tilde{\pi}(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \cdot (g^{-1} \cdot w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} w = \frac{1}{|G|}|G|w = w.$$

Par conséquent, le sous-espace $\ker \tilde{\pi}$ est G-invariant et supplémentaire à W.

Exemple 5. Montrons que le groupe additif $\mathbb{G}_a$ n'est pas linéairement réductif en donnant une représentation $\tau : \mathbb{G}_a \to GL_2(\mathbb{K})$ et un point de $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})\backslash\{(0,0)\}$ fixé par l'action de $\mathbb{G}_a$ tel que pour tout polynôme de deux variables homogène de degré 1 invariant par l'action de $\mathbb{G}_a$ s'annule en ce point.
Considérons la représentation

$$\begin{array}{rcccc}
\tau & : & \mathbb{G}_a & \longrightarrow & GL_2(\mathbb{K}) \\
 & & a & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Le point $(1,0)$ est fixé par l'action de $\mathbb{G}_a$ sur $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$. De plus, un polynôme de deux variables homogène de degré 1 invariant par l'action de $\mathbb{G}_a$ sur $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ est de la forme $h(x,y) = by$, $b \in \mathbb{K}$. Enfin, comme on a $h(1,0) = 0$, cela montre bien que $\mathbb{G}_a$ n'est pas linéairement réductif.

Montrons maintenant, qu'en fait, les deux notions réductif et linéairement réductif sont équivalentes.

Théorème 1.2.4. *Soit G un groupe algébrique affine. Il y a équivalence entre :*

i. Le groupe G est réductif;

ii. Le groupe G est linéairement réductif.

Démonstration.

ii. $\Longrightarrow$ i. On peut supposer que le groupe G est plongé dans $GL_n(\mathbb{K})$. Supposons que G n'est pas réductif. Soit donc H un sous-groupe unipotent distingué de G non-trivial. Considérons le G-module $\mathbb{K}^n$. Le sous-espace $(\mathbb{K}^n)^H \subset \mathbb{K}^n$ des points fixés par l'action de H est non-trivial car H est non-trivial. De plus, $(\mathbb{K}^n)^H$ est G-invariant car H est distingué dans G. Donc d'après la proposition 1.2.3, $\mathbb{K}^n = (\mathbb{K}^n)^H \oplus W$ où $W \subset \mathbb{K}^n$ est un sous-espace G-invariant. Mais, encore une fois, $W^H \neq \{0\}$ ce qui implique que $(\mathbb{K}^n)^H \cap W \neq \{0\}$, ce qui est contradictoire.

i. $\Longrightarrow$ ii. Voir le théorème 27.3.3 dans [13].

✠

Concluons cette section par le fait suivant qui nous sera très utile par la suite : l'action d'un groupe réductif sur une variété affine peut être ramenée à une représentation.

Proposition 1.2.5. *Soit X une variété algébrique affine sur laquelle agit un groupe linéairement réductif G. Alors il existe un plongement G-équivariant $\iota : X \hookrightarrow V$ où V désigne un G-module rationnel.*

Preuve. Voir le lemme A.1.9 dans [1]. ✠

1.3 Théorème de Hilbert-Nagata

Commençons par la proposition suivante qui sera essentielle pour la suite de ce travail.

Proposition 1.3.1. *Soit G un groupe réductif agissant sur une variété affine X. Si Z_1 et Z_2 sont des fermés, disjoints et G-invariants, alors il existe une fonction régulière G-invariante $f \in \mathbb{K}[X]^G$ qui sépare ces deux fermés. Autrement dit,*

$$f_{|Z_1} = 0 \quad \text{et} \quad f_{|Z_2} = 1.$$

Preuve. Comme Z_1 et Z_2 sont fermés et disjoints, on a

$$\mathbb{K}[X] = \mathcal{I}(\varnothing) = \mathcal{I}(Z_1 \cap Z_2) = \mathcal{I}(Z_1) + \mathcal{I}(Z_2)$$

En particulier, il existe $f_1 \in \mathcal{I}(Z_1)$ et $f_2 \in \mathcal{I}(Z_2)$ tels que $f_1 + f_2 = 1$. On a alors $f_{1|Z_1} = 0$ et $f_{1|Z_2} = 1$.
On sait que les translatés de f_1 engendrent un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{K}[X]$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et invariant par l'action de G sur $\mathbb{K}[X]$ (Voir lemme 3.8 dans [5]). Soit $(h_1, \ldots, h_n)$ une base de V. Cette base définit un morphisme

$$\begin{array}{cccc} h & : & X & \longrightarrow & \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \\ & & x & \longmapsto & (h_1(x), \ldots, h_n(x)) \end{array}$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, h_i est une combinaison linéaire de translatés de f_1. Donc

$$h_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} g_{ij} \cdot f_1,$$

où pour tout $j \in \{1, \ldots, m_i\}$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ et $g_{ij} \in G$. Alors pour tout $x \in X$,

$$h_i(x) = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} f_1(g_{ij}^{-1} \cdot x)$$

Comme Z_1 et Z_2 sont invariants par l'action de G et que f_1 prend la valeur 0 sur Z_1 et la valeur 1 sur Z_2, alors, $h_{|Z_1} = 0$ et $h_{|Z_2} \neq 0$. Notons v la valeur de h sur Z_2.

Comme pour tout $g \in G$, $g \cdot h_i \in V$, alors on peut les écrire dans la base donnée comme étant

$$g \cdot h_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(g) h_k.$$

On définit ainsi une représentation

$$\begin{array}{rccc} \tau & : & G & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ & & g & \longmapsto & (b_{ik}(g))_{ik} \end{array}$$

telle que $h : X \to \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ est équivariante pour l'action de G sur X et sur $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ par cette représentation. Dans ce cas, $v \neq 0$ est un point fixé par l'action de G.
Enfin, comme G est réductif, par la proposition 1.2.3, il existe un polynôme homogène $P \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^G$ de degré 1 tel que $P(v) \neq 0$ et tel que $P(0) = 0$. Donc

$$f = \frac{1}{P(v)} P \circ h$$

est une fonction invariante satisfaisant les conditions de l'énoncé. ✠

Une autre propriété très utile des groupes réductifs est qu'il existe une notion de "moyennisation", connue sous le nom d'opérateur de Reynolds.

Définition 1.3.2. Soit G un groupe algébrique affine agissant sur une variété algébrique affine X sur $\mathbb{K}$. Une application linéaire $R_X : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]^G$ est appelée *opérateur de Reynolds* si c'est une projection sur $\mathbb{K}[X]^G$ et pour $a \in \mathbb{K}[X]^G$ et $h \in \mathbb{K}[X]$ on a $R_X(ah) = aR_X(h)$.

Exemple 6. Soit G un groupe fini et X une variété algébrique affine sur laquelle G agit. L'application

$$\begin{array}{rccc} R_X & : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X]^G \\ & & h & \longmapsto & \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} g \cdot h \end{array}$$

est un opérateur de Reynolds. En effet, R_X est bien une projection sur $\mathbb{K}[X]^G$ car pour $a \in \mathbb{K}[X]^G$, on a

$$R_X(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot a = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a = \frac{1}{|G|} |G| \, a = a.$$

De plus, pour $a \in \mathbb{K}[X]^G$ et $h \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$R_X(ah) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot (ah) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g \cdot a)(g \cdot h) = a \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot h = aR_X(h).$$

Lemme 1.3.3. *Soit G un groupe réductif agissant sur une variété algébrique affine X. Alors il existe un opérateur de Reynolds $R_X : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]^G$.*

Preuve. Puisque le groupe G est réductif, par la proposition 1.2.3, on sait que tout G-module rationnel V possède un supplémentaire G-invariant. On a donc la décomposition $V = V^G \oplus W$. Définissons $\rho_V : V = V^G \oplus W \to V^G$ la projection sur V^G le

long de W. Si V' est un autre G-module tel que $V \subseteq V'$, alors la restriction de $\rho_{V'}$ à W est 0 (Voir Théorème 2.2.5 b) $\Longrightarrow$ c) dans [1]).
Par la suite, comme $h - \rho_V(h) \in W$ pour $h \in V$, on obtient

$$0 = \rho_{V'}(h - \rho_V(h)) = \rho_{V'}(h) - \rho_V(h).$$

Cela signifie que la restriction de $\rho_{V'}$ à V est égale à ρ_V.
Maintenant, prenons $h \in \mathbb{K}[X]$ et définissons

$$R_X(h) = \rho_V(h)$$

où $V \subseteq \mathbb{K}[X]$ est un sous-espace G-invariant contenant h. Vérifions que cette définition ne dépend pas du choix de V. En effet soit V' un autre sous-espace G-invariant contenant h. On a alors

$$\rho_V(h) = \rho_{V+V'}(h) = \rho_{V'}(h).$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que R_X est bien un opérateur de Reynolds. Pour cela, soit $a \in \mathbb{K}[X]^G$ et $h \in \mathbb{K}[X]$. Si $V \subseteq \mathbb{K}[X]$ est un sous-espace G-invariant contenant h, alors aV est un sous-espace G-invariant contenant ah. On a alors par définition

$$R_X(ah) = \rho_{aV}(ah).$$

Par la décomposition $V = V^G \oplus W$, on a $aV = aV^G \oplus aW$. Cela signifie donc que

$$\rho_{aV}(ah) = a\rho_V(h).$$

D'où

$$R_X(ah) = aR_X(h)$$

✠

Théorème 1.3.4 (Hilbert - Nagata)**.** *Soit G un groupe réductif agissant sur une variété algébrique affine X. Alors la sous-algèbre $\mathbb{K}[X]^G$ est de type fini.*

Démonstration. On a la graduation

$$\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} A_r$$

où $A_0 = \mathbb{K}$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$, A_r désigne l'espace des polynômes homogènes de degré r. On obtient la graduation suivante

$$\mathbb{K}[X]^G = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} A_r^G.$$

Notons $(\mathbb{K}[X]^G)_+ \subset \mathbb{K}[X]^G$ l'idéal dont les éléments sont les fonctions régulières invariantes par l'action de G de degré strictement positif. Montrons qu'il est de type fini en tant qu'idéal de $\mathbb{K}[X]^G$.

Comme l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est noethérien, l'idéal $(\mathbb{K}[X]^G)_+$ est de type fini dans $\mathbb{K}[X]$. On peut donc trouver des générateurs $(t_1, \cdots, t_m)$ de l'idéal $(\mathbb{K}[X]^G)_+$, où $t_1, \cdots, t_m \in (\mathbb{K}[X]^G)_+$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que la famille $(t_1, \cdots, t_m)$ engendre l'idéal $(\mathbb{K}[X]^G)_+$ dans $\mathbb{K}[X]^G$. Soit $f \in (\mathbb{K}[X]^G)_+$. On écrit alors

$$f = f_1 t_1 + \cdots + f_m t_m$$

où $f_1, \cdots, f_m \in \mathbb{K}[X]$.

Puisque $f \in (\mathbb{K}[X]^G)_+ \subset \mathbb{K}[X]^G$, en appliquant l'opérateur de Reynolds $R_X : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]^G$, on a $R_X(f) = f$. Mais d'un autre côté

$$R_X(f) = R_X(f_1 t_1 + \cdots + f_m t_m) = R_X(f_1) t_1 + \cdots + R_X(f_m) t_m.$$

où $R_X(f_1), \cdots, R_X(f_m) \in \mathbb{K}[X]^G$. Cela montre bien que l'idéal $(\mathbb{K}[X]^G)_+$ est engendré par la famille $(t_1, \cdots, t_m)$ dans $\mathbb{K}[X]^G$.

Enfin, en appliquant la proposition 1.14 (Chapitre 6) dans [10], comme $\mathbb{K}[X]^G$ est un anneau gradué et que la famille $(t_1, \cdots, t_m) \subset \mathbb{K}[X]^G_+$ engendre $\mathbb{K}[X]^G_+$ en tant qu'idéal de $\mathbb{K}[X]^G$, alors la famille $(t_1, \cdots, t_m)$ engendre $\mathbb{K}[X]^G$ en tant que $\mathbb{K}$-algèbre. On a ainsi démontré que $\mathbb{K}[X]^G$ est de type fini. ✠

2

Invariants géométriques affines

Soit G un groupe algébrique affine agissant sur une variété affine X. L'ensemble des orbites X/G n'admet pas toujours une structure de variété. Cela nous motive alors à considérer d'autres "quotients" qui possèdent une telle structure.

2.1 Bon quotient et quotient géométrique

Définition 2.1.1. Un morphisme $\varphi : X \to Y$ de variétés algébriques affines est un *bon quotient* pour l'action du groupe G sur la variété X si

i. Le morphisme φ est constant sur les orbites (C'est-à-dire que pour tout $x \in X$ fixé, quelque soit $g \in G$, on a $\varphi(g \cdot x) = \varphi(x)$) ;
ii. Le morphisme φ est surjectif ;
iii. Si $U \subset Y$ est un ouvert, le morphisme $\mathbb{K}[U] \to \mathbb{K}[\varphi^{-1}(U)]$ est un isomorphisme dans la sous-algèbre $\mathbb{K}[\varphi^{-1}(U)]^G$;
iv. Si $Z \subset X$ est un fermé G-invariant de X, son image $\varphi(Z)$ est fermée dans Y ;
v. Si Z_1 et Z_2 sont deux fermés G-invariants disjoints de X, alors $\varphi(Z_1)$ et $\varphi(Z_2)$ sont disjoints.

Si, de plus, l'image réciproque de chaque point est une seule orbite, alors on dit que φ est un *quotient géométrique.*

Exemple 7. Faisons agir le groupe additif $\mathbb{G}_a$ sur l'espace affine $\mathbb{A}^2(K)$ par

$$t \cdot (x, y) = (t + x, y),$$

où $t \in \mathbb{G}_a$ et $(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$.
Les orbites des points $(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ sont données par

$$\mathbb{G}_a \cdot (x, y) = \{(t + x, y) \mid t \in \mathbb{G}_a\}.$$

Elles sont données par la figure suivante

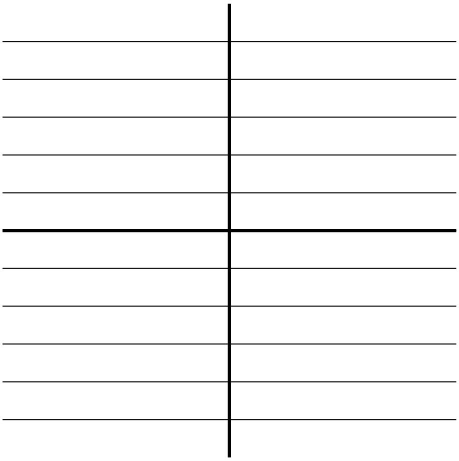


FIGURE 2.1 – Orbites par l'action de $\mathbb{G}_a$ sur $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$

L'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) \\ & & (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

est naturellement un bon quotient, puisqu'il est constant sur les orbites et surjectif.

Proposition 2.1.2. *Soit $\varphi : X \to Y$ un bon quotient. Alors*

i. Pour tous $x_1, x_2 \in X$, $\overline{G \cdot x_1} \cap \overline{G \cdot x_2} \neq \varnothing$ si et seulement si $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$;

ii. Pour tout $y \in Y$, l'image réciproque $\varphi^{-1}(\{y\})$ contient une unique orbite fermée. En particulier, si toutes les orbites sont fermées alors φ est un quotient géométrique.

Preuve.

i. Posons $y_1 = \varphi(x_1)$ (resp. $y_2 = \varphi(x_2)$). Comme φ est constante sur les orbites alors $G \cdot x_1 \subset \varphi^{-1}(\{y_1\})$ (resp. $G \cdot x_2 \subset \varphi^{-1}(\{y_2\})$). De plus, puisque φ est continue, alors $\varphi^{-1}(\{y_1\})$ (resp. $\varphi^{-1}(\{y_2\})$) est fermé et donc $\overline{G \cdot x_1} \subset \varphi^{-1}(\{y_1\})$ (resp. $\overline{G \cdot x_2} \subset \varphi^{-1}(\{y_2\})$).

   Supposons que $\overline{G \cdot x_1} \cap \overline{G \cdot x_2} \neq \varnothing$. Soit alors $z \in \overline{G \cdot x_1} \cap \overline{G \cdot x_2}$.

   Comme $z \in \overline{G \cdot x_1} \subset \varphi^{-1}(\{y_1\})$ alors $\varphi(z) = y_1$. De même, puisque $z \in \overline{G \cdot x_2} \subset \varphi^{-1}(\{y_2\})$, alors $\varphi(z) = y_2$. D'où $y_1 = y_2$, ce qui donne la première implication.

   Réciproquement, supposons par l'absurde que $\overline{G \cdot x_1} \cap \overline{G \cdot x_2} = \varnothing$. D'après la définition 2.1.1, $\varphi(\overline{G \cdot x_1}) \cap \varphi(\overline{G \cdot x_2}) = \varnothing$, ce qui contredit $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

ii. Soit $y \in Y$. Comme $\varphi^{-1}(\{y\})$ est fermée et φ constante sur les orbites, alors d'après [13] (Proposition 21.4.5), cette fibre contient une orbite fermée.

   Supposons maintenant que l'on a deux orbites fermées et distinctes Z_1 et Z_2 dans $\varphi^{-1}(\{y\})$. Par conséquent, leurs images par φ est égale à $\{y\}$, ce qui contredit la définition 2.1.1.

✠

Proposition 2.1.3. *Si $\varphi : X \to Y$ est un bon quotient (resp. quotient géométrique), alors pour tout ouvert $U \subset Y$ la restriction $\varphi_| : \varphi^{-1}(U) \to U$ est aussi un bon quotient (resp. quotient géométrique) de G agissant sur $\varphi^{-1}(U)$.*

Preuve. Les trois premiers points de la définition 2.1.1 étant satisfaits, il ne reste que les deux derniers points à vérifier.

- Soit $Z \subset \varphi^{-1}(U)$ un fermé G-invariant de X et $y \in \overline{\varphi(Z)}$ l'adhérence de $\varphi(Z)$ dans U. Alors si $\overline{Z}$ est l'adhérence de Z dans X, on a alors que $y \in \overline{\varphi(Z)} \subset \varphi(\overline{Z})$. Comme $\varphi : X \to Y$ est un bon quotient, alors $\varphi^{-1}(\{y\}) \cap \overline{Z} \neq \varnothing$. Mais puisque $\varphi^{-1}(\{y\}) \subset \varphi^{-1}(U)$, cela implique que $\varphi^{-1}(\{y\}) \cap Z \neq \varnothing$ et donc $y \in \varphi(Z)$. Cela montre alors que cet ensemble est fermé.
- Soient Z_1 et Z_2 deux fermés G-invariants disjoints de $\varphi^{-1}(U)$. Notons leurs adhérences dans X par $\overline{Z_1}$ et $\overline{Z_2}$ respectivement. Supposons qu'il existe $y \in \varphi(Z_1) \cap \varphi(Z_2) \subset U$, alors comme φ est un bon quotient, $\varphi^{-1}(\{y\}) \cap \overline{Z_1} \cap \overline{Z_2} \neq \varnothing$. Mais $\varphi^{-1}(\{y\}) \subset \varphi^U$ et comme Z_1 et Z_2 sont tous deux fermés dans $\varphi^{-1}(U)$, alors $\varphi^1(U) \cap \overline{Z_1} \cap \overline{Z_2} = Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. Ce qui est contradictoire.

On a ainsi montré que la restriction $\varphi_|$ est aussi un bon quotient. Si φ est un quotient géométrique, il est alors évident que $\varphi_|$ l'est aussi. ✠

Remarque. Les définitions de bon quotient et de quotient géométrique sont locales : plus précisément, si $\varphi : X \to Y$ est un morphisme G-invariant et si $(U_i)_i$ est un recouvrement ouvert de Y tel que $\varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \to U_i$ est un bon quotient (resp. un quotient géométrique) pour tout i, alors $\varphi : X \to Y$ l'est aussi.

2.2 Quotient affine GIT

Soit G un groupe réductif agissant sur une variété algébrique affine X. On a vu précédemment que cela induit une action de G sur l'algèbre des fonctions régulières $\mathbb{K}[X]$ qui est de type fini. Par le théorème de Hilbert-Nagata (Théorème 1.3.4), la sous-algèbre des $\mathbb{K}[X]^G$ est de type fini. Cela implique donc que $\mathbb{K}[X]^G$ est l'algèbre des fonctions régulières d'une certaine variété algébrique affine que l'on notera $X//G$.

Définition 2.2.1. On appelle *quotient affine GIT* le morphisme $\varphi : X \to X//G$ de variétés affines associé à l'inclusions $\varphi^* : \mathbb{K}[X]^G \hookrightarrow \mathbb{K}[X]$.

Théorème 2.2.2. *Soit G un groupe réductif agissant sur une variété affine X. Le quotient affine GIT $\varphi : X \to X//G$ est un bon quotient.*

Démonstration.

- Soient $x \in X$ fixé et $g \in G$. Pour $f \in \mathbb{K}[X]^G$, on a $\varphi^*(f)(x) = (f \circ \varphi)(x)$ par définition. Puisque φ^* est le morphisme d'inclusion alors $\varphi^*(f)(x) = f(x)$. Donc $f(\varphi(x)) = f(x)$. Mais comme $f \in \mathbb{K}[X]^G$, alors $f(g \cdot x) = f(x)$. Donc $f(\varphi(x)) = f(g \cdot x) = f(\varphi(g \cdot x))$. D'où $\varphi(x) = \varphi(g \cdot x)$ par la proposition 1.3.1.
- Soit $\xi \in X//G$ et soit $\mathfrak{I}$ l'idéal maximal dans $\mathbb{K}[X]^G$ qui lui correspond. Comme $\mathbb{K}[X]^G$ est de type fini, on peut choisir $(t_1, \cdots, t_m)$ une famille de générateurs de $\mathfrak{I}$. Montrons que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} t_i \mathbb{K}[X]\right) \cap \mathbb{K}[X]^G = \sum_{i=1}^{m} t_i \mathbb{K}[X]^G.$$

En effet, puisque l'idéal $\mathfrak{I}$ est engendré par la famille $(t_1, \cdots, t_m)$, la partie à droite de cette expression est incluse dans la partie à gauche.
Afin de montrer l'autre inclusion, prenons $f \in \mathbb{K}[X]^G$ tel que $f = \sum_{i=1}^m a_i t_i$ avec $a_i \in \mathbb{K}[X]$ pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$. En appliquant l'opérateur de Reynolds $R_X : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]^G$, on a

$$f = R_X(f) = \sum_{i=1}^m R_X(a_i)t_i$$

avec $R_X(a_i) \in \mathbb{K}[X]$ pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$. Ce qui montre la seconde inclusion.
Par conséquent, on a

$$\sum_{i=1}^m t_i \mathbb{K}[X] \neq \mathbb{K}[X]$$

donc cette somme est contenue dans un idéal maximal $\mathfrak{J} \subset \mathbb{K}[X]$ et ce dernier correspond à un point fermé $x \in X$ et on a $\varphi(x) = \xi$.

- Pour tout $f \in \mathbb{K}[X]^G \backslash \{0\}$, les ouverts $D_{X//G}(f) = \{\xi \in X//G \,|\, f(\xi) \neq 0\}$ forment une base de topologie. Il suffit alors de montrer le troisième point de la définition 2.1.1 pour ces ouverts là. On a

$$\mathbb{K}[D_{X//G}(f)] = (\mathbb{K}[X]^G)_f$$

est le localisé de $\mathbb{K}[X]^G$ en f. De plus,

$$\mathbb{K}[\varphi^{-1}(D_{X//G}(f))]^G = \mathbb{K}[D_X(f)]^G = (\mathbb{K}[X]_f)^G = (\mathbb{K}[X]^G)_f = \mathbb{K}[D_{X//G}(f)];$$

car le localisé commute avec les G-invariants. Donc l'image du morphisme d'inclusion

$$\varphi^*_{|\mathbb{K}[D_{X//G}(f)]} : \mathbb{K}[D_{X//G}(f)] = (\mathbb{K}[X]^G)_f \longrightarrow \mathbb{K}[\varphi^{-1}(D_{X//G}(f))] = \mathbb{K}[X]_f$$

n'est autre que $\mathbb{K}[\varphi^{-1}(D_{X//G}(f))]^G = (\mathbb{K}[X]_f)^G$ et morphisme est bien un isomorphisme dans son image.

- Montrer les deux derniers points de la définition 2.1.1 est équivalent à montrer le point suivant :

  Si Z_1 et Z_2 sont deux fermés disjoints et G-invariants, alors $\overline{\varphi(Z_1)}$ et $\overline{\varphi(Z_2)}$ sont disjoints.

  En effet, il est clair que si les deux derniers points de la définition 2.1.1 sont vérifiés alors ce point l'est aussi. Réciproquement, si ce point est vérifié, montrons que pour Z fermé G-invariant, $\varphi(Z)$ est fermé. Soit $\xi \in \overline{\varphi(Z)}$. Comme

$$\overline{\varphi(Z)} \cap \overline{\varphi(\varphi^{-1}(\{\xi\}))} = \overline{\varphi(Z)} \cap \{\xi\} = \{\xi\} \neq \varnothing$$

alors par le point ci-dessus, on a

$$Z \cap \varphi^{-1}(\{\xi\}) \neq \varnothing,$$

d'où $\xi \in \varphi(Z)$ et donc le quatrième point de la définition 2.1.1 est vérifié. Quand au cinquième point, il est immédiat.

Soient maintenant deux fermés disjoints et G-invariants Z_1 et Z_2 dans X. Par la proposition 1.3.1, il existe une fonction régulière $f \in \mathbb{K}[X]^G$ telle que f sépare Z_1 et Z_2. Cela veut dire que pour $z_1 \in Z_1$ et $z_2 \in Z_2$, on a $f(z_1) = 0$ et $f(z_2) = 1$. De plus, $f = \varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Donc $f(\varphi(z_1)) = 0$ et $f(\varphi(z_2)) = 1$. Alors en regardant f comme une fonction régulière on a nécessairement

$$\varphi(z_1) \neq \varphi(z_2)$$

D'où, d'après la proposition 2.1.2,

$$\overline{\varphi(Z_1)} \cap \overline{\varphi(Z_2)} = \varnothing.$$

✠

Remarque. D'après la proposition 2.1.2, pour $x \in X$, $\varphi^{-1}(\{\varphi(x)\})$ contient une unique orbite fermée O. De plus

$$\varphi^{-1}(\{\varphi(x)\}) = \{\xi \in X//G \,|\, O \subset \overline{G \cdot \xi}\}$$

On peut alors identifier de manière ensembliste $X//G$ avec l'ensemble des orbites fermées de X sur G.

Exemple 8. On fait agir $\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{K}^*$ sur $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ par *multiplication scalaire.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \\ (t,(x,y)) & \longmapsto & (tx,ty) \end{array}$$

Les orbites par cette action sont

- $\mathbb{G}_m \cdot (0,0) = \{(0,0)\}$;
- $\mathbb{G}_m \cdot (a,b) = \{(ta,tb) \,|\, t \in \mathbb{G}_m\}$, où $(a,b) \neq (0,0)$.

Elles sont représentées sur la figure suivante :

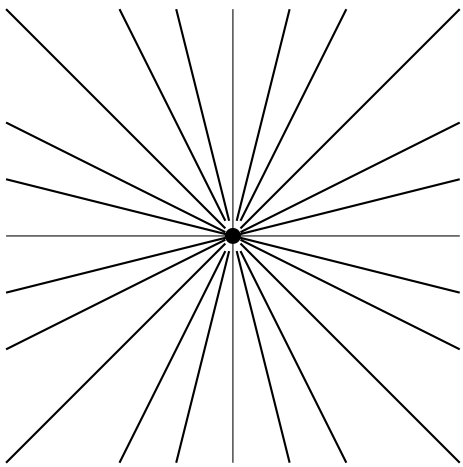


FIGURE 2.2 – Orbites de l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ par multiplication scalaire

Dans ce cas, l'origine est la seule orbite fermée, donc $X//G = \{G\cdot(0,0)\} \simeq \operatorname{Spec}\mathbb{K}$. On a alors le quotient GIT

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \operatorname{Spec}\mathbb{K} \\ & & (x,y) & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Plus précisément, puisque $\mathbb{K}[\mathbb{A}^2(\mathbb{K})] = \mathbb{K}[x,y]$ et $\mathbb{K}[\mathbb{A}^2(\mathbb{K})]^{\mathbb{G}_m} = \mathbb{K}$, alors le bon quotient ci-dessus provient du morphisme d'inclusion $\varphi^* : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}[x,y]$.

Exemple 9. On fait agir $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \\ (t,(x,y)) & \longmapsto & (tx, t^{-1}y) \end{array}$$

Les orbites pour cette action sont

- $G\cdot(0,0) = \{(0,0)\}$;
- $G\cdot(a,0) = \{(tx,0), t\in\mathbb{G}_m\}$, où $a \neq 0$;
- $G\cdot(0,b) = \{(0,t^{-1}y), t\in\mathbb{G}_m\}$, où $b \neq 0$;
- $G\cdot(a,b) = \{(tx,t^{-1}y), t\in\mathbb{G}_m\} = \{(x,y)\in\mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \mid xy = ab\}$, où $a\neq 0$ et $b \neq 0$.

Elles sont représentées sur la figure suivante :

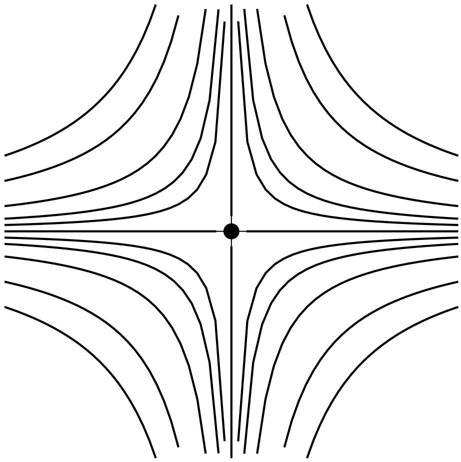


Figure 2.3 – Orbites pour l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$

Dans ce cas, l'ensemble orbites fermées est

$$X//G = \{G\cdot(0,0), G\cdot(a,b), a\neq 0 \text{ et } b\neq 0\}$$

Pour l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{K}[\mathbb{A}^2(\mathbb{K})] = \mathbb{K}[x,y]$, on a

$$\mathbb{K}[x,y]^{\mathbb{G}_m} = \mathbb{K}[xy] \simeq \mathbb{K}[z]$$

Donc $X//G \simeq \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$. On a alors le quotient GIT

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) \\ & & (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

2.3 Action d'un groupe réductif sur le fibré trivial

Soit G un groupe réductif agissant sur une variété affine X. La variété $X//G$ ne coïncide pas avec le quotient X/G. En particulier, si une orbite est contenue dans l'adhérence de toutes les autres orbites, alors $X//G$ est simplement un point (Voir exemple 8).

Afin d'obtenir un morphisme qui sépare mieux les orbites, on fixe un caractère $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ pour "linéariser" l'action de telle sorte que l'on obtienne un "meilleur quotient".

Soit $L = X \times \mathbb{K}$ le fibré en droites trivial sur X. Utilisons χ pour relever l'action de G sur X à L de telle sorte que

$$g \underset{(1)}{\circ} (x,a) = (g\cdot x, \chi(g)a),$$

pour $g \in G$ et $(x,a) \in L$. On note L_χ la linéarisation qui se compose du fibré en droites trivial L ainsi que de le relèvement de l'action de G donnée par χ. De même, on définit la *linéarisation duale* à L_χ par l'action

$$g \underset{(-1)}{\circ} (x,a) = (g\cdot x, (\chi(g))^{-1}a),$$

et on la note $L_{\chi^{-1}}$. De manière plus générale, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on définit la linéarisation L_{χ^n} par l'action

$$g \underset{(n)}{\circ} (x,a) = (g\cdot x, (\chi(g))^{n}a).$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit l'ensemble des sections du fibré $\pi_1 : L_{\chi^n} \to X$ morphisme de projection du premier facteur.

$$\Gamma(X, L_{\chi^n}) = \{\sigma : X \to L_{\chi^n} \,|\, \sigma \text{ est un morphisme et } \pi_1 \circ \sigma = \mathrm{id}_X\}.$$

Cet ensemble s'identifie à $\mathbb{K}[X]_{\chi^n}$ qui n'est autre que $\mathbb{K}[X]$ sur lequel agit G par

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (g,f) & \longmapsto & (\chi(g))^n f \end{array}$$

En effet, étant donné $f \in \mathbb{K}[X]_{\chi^n}$, on définit une section σ par $\sigma(x) = (x, f(x))$. Réciproquement, étant donnée une section σ, alors $\pi_2 \circ \sigma$ appartient à $\mathbb{K}[X]_{\chi^n}$ où $\pi_2 : L_{\chi^n} \to \mathbb{K}$ désigne le morphisme de projection du second facteur. Ces deux constructions définissent deux applications réciproques l'une de l'autre.

L'action de G sur X et sur L_{χ^n} induit une action sur $\Gamma(X, L_{\chi^n})$ par

$$\begin{array}{ccl} G \times \Gamma(X, L_{\chi^n}) & \longrightarrow & \Gamma(X, L_{\chi^n}) \\ (g,\sigma) & \longmapsto & g\cdot\sigma : x \mapsto g \underset{(n)}{\circ} (g^{-1}\cdot x, f(g^{-1}\cdot x)) = (x, (\chi(g))^n f(g^{-1}\cdot x)) \end{array}$$

L'ensemble des sections invariantes est alors défini par

$$\Gamma(X, L_{\chi^n})^G = \{\sigma \in \Gamma(X, L_{\chi^n}) \,|\, \forall g \in G,\, g\cdot\sigma = \sigma\},$$

qui est isomorphe à

$$\mathbb{K}[X]^G_{\chi^n} = \{f \in \mathbb{K}[X]_{\chi^n} \,|\, \forall g \in G, \forall x \in X, f(g \cdot x) = \chi^n(g) f(x)\}.$$

Considérons maintenant l'algèbre graduée

$$S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(X, L_{\chi^n}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}[X]_{\chi^n}$$

telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on fait agir G sur $\Gamma(X, L_{\chi^n})$. Considérons de plus sa sous-algèbre invariante

$$S^G = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(X, L_{\chi^n})^G = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}[X]^G_{\chi^n}$$

appelée *algèbre des semi-invariants* de X de *poids* χ^n.
L'inclusion $S^G \hookrightarrow S$ induit une application rationnelle $X \dashrightarrow X//_\chi G \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Proj} S^G$ qui est non-définie sur le cône nul

$$N = \{x \in X \,|\, \forall f \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{K}[X]^G_{\chi^n}, f(x) = 0\}$$

Exemple 10. Pour l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ par multiplication scalaire dans l'exemple 8, considérons le caractère $\chi = \mathrm{id}_{\mathbb{G}_m}$. Dans ce cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{K}[\mathbb{A}^2(\mathbb{K})]^{\mathbb{G}_m}_{\chi^n} = \{f \in \mathbb{K}[X]_{\chi^n} \,|\, \forall t \in \mathbb{G}_m, \forall (x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{K}), f(tx, ty) = t^n f(x,y)\}$$

Ce n'est autre que l'ensemble des polynômes homogènes de degré n. Dans ce cas, $X//_\chi G = \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. L'application rationnelle donnée par l'inclusion $S^{\mathbb{G}_m} \hookrightarrow S$ est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) & \dashrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \\ (x,y) & \longmapsto & [x,y] \end{array}$$

et elle est non définie pour $N = (0,0)$.

2.4 Semi-stabilité et stabilité

Soit G un groupe réductif agissant sur une variété affine X linéarisée par un caractère $\chi : G \to \mathbb{G}_m$. En reprenant les notations de la section précédente, on a la définition suivante :

Définition 2.4.1. Soit $\xi \in X$.

i. Le point ξ est dit χ-*semi-stable* s'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il existe $f \in \mathbb{K}[X]^G_{\chi^n}$ tel que $f(\xi) \neq 0$;

ii. Le point ξ est dit χ-*stable* si $\dim G_\xi = 0$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il existe $f \in \mathbb{K}[X]^G_{\chi^n}$ tel que $f(\xi) \neq 0$ et si de plus, toutes les orbites de l'action de G sur $D(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ sont fermées.

iii. Le point ξ est dit χ-*instable* s'il n'est pas χ-*semi-stable*.

On note $X^{\chi-ss}$ l'ensemble des points de X qui sont χ-semi-stables et $X^{\chi-s}$ l'ensemble des points de X qui sont χ-stables.

Remarque. Il est évident que $X^{\chi-ss}$ est un ouvert de X, c'est le complémentaire du cône nul N. Par un raisonnement analogue à celui du théorème 2.2.2, on montre que le morphisme $\varphi : X^{\chi-ss} \to X//_{\chi}G$ est un bon quotient, on l'appelle quotient GIT *respectant le caractère* χ. On a de plus le lemme suivant :

Lemme 2.4.2. *Le sous-ensemble $X^{\chi-s}$ est un ouvert de X stable par l'action de G sur X. De plus, $Y^{\chi-s} = \varphi(X^{\chi-s})$ est un ouvert de $X//_{\chi}G$, $\varphi^{-1}(Y^{\chi-s}) = X^{\chi-s}$ et $\varphi_| : X^{\chi-s} \to Y^{\chi-s}$ est un quotient géométrique.*

Preuve. Afin de montrer que $X^{\chi-s}$ est ouvert, nous allons montrer qu'il est voisinage de tous ses points. Soit alors $\xi \in X^{\chi-s}$.

Considérons le fermé

$$X_+ = \{x \in X \mid \dim G_x > 0\}.$$

Comme $G \cdot \xi \cap X_+ = \varnothing$, alors par la proposition 1.3.1, il existe $f \in \mathbb{K}[X]^G_{\chi^n}$ tel que $f_{|X_+} = 0$ et $f_{G\cdot\xi} = 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

De plus, on a forcément $f(\xi) \neq 0$ car sinon $\xi \in X_+$ et donc $\xi \in D(f)$. Il ne reste plus qu'à montrer que $D(f) \subset X^{\chi-s}$ pour que $X^{\chi-s}$ soit un voisinage de ξ.

Pour commencer, il est clair que tout point de $D(f)$ doit avoir un stabilisateur de dimension nulle. Il ne reste alors qu'à montrer que les orbites par l'action de G sur $D(f)$ sont fermées. Supposons, par l'absurde, que $x \in D(f)$ possède une orbite qui n'est pas fermée. Soit alors $z \in \overline{G \cdot x} \setminus G \cdot x$ et donc $z \in D(f)$ car $f \in \mathbb{K}[X]^G_{\chi^n}$ et le stabilisateur de z est de dimension nulle. Mais $\overline{G \cdot x} \setminus G \cdot x$ est l'union d'orbites de dimension strictement plus petites ([13] Proposition 21.4.5) et donc l'orbite $G \cdot z$ doit être de dimension strictement plus petite que celle de x, ce qui contredit le fait que z possède un stabilisateur de dimension nulle. D'où $X^{\chi-ss}$ est un ouvert recouvert par les ouverts de la forme $D(f)$ avec $f \in \mathbb{K}[X]^G_{\chi^n}$.

Comme $\varphi(D(f))$ est ouvert et $\varphi^{-1}(\varphi(D(f))) = D(f)$, alors $Y^{\chi-s}$ est ouvert et on a $\varphi^{-1}(\varphi(Y^{\chi-s})) = Y^{\chi-s}$. Par la proposition 2.1.3, cela implique que $\varphi_| : X^{\chi-s} \to Y^{\chi-s}$ est un bon quotient. De plus, toutes les orbites par l'action de G sur $X^{\chi-s}$ sont fermées et donc, par la proposition 2.1.2, $\varphi_| : X^{\chi-s} \to Y^{\chi-s}$ est un quotient géométrique. ✠

Dans ce qui suit, nous allons déterminer des conditions nécessaires et suffisantes de (semi-)stabilité. Remarquons, en premier lieu, que lorsque G est un groupe fini, tout bon quotient est un quotient géométrique. En effet, cela provient de la proposition 2.1.2 car chaque orbite par l'action d'un groupe fini est finie et est dont fermée. Par conséquent, la notion de semi-stabilité est triviale pour tout caractère. C'est pour cette raison que, dans ce qui suit, le groupe G est supposé infini.

Proposition 2.4.3. *Soit $(\xi, \alpha) \in L_{\chi^{-1}}$ où $\alpha \neq 0$. Alors*

i. Le point ξ est χ-semi-stable si et seulement si l'adhérence $\overline{G \underset{(-1)}{\circ} (\xi, \alpha)}$ de l'orbite de (ξ, α) dans $L_{\chi^{-1}}$ est disjointe de la section nulle $X \times \{0\} \subset L_{\chi^{-1}}$.

ii. Le point ξ est χ-stable si et seulement si l'orbite $G \cdot (\xi, \alpha)$ de (ξ, α) dans $L_{\chi^{-1}}$ est fermée et $\dim G \cdot (\xi, \alpha) = \dim G$.

Preuve.

i. Supposons que ξ soit χ-semi-stable. Il existe alors un entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe $f \in \mathbb{K}[X]^G_{\chi^n}$ telle que $f(\xi) \neq 0$.
Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G telle que la suite $(g_k \cdot \xi)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\eta \in X$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
$$(g_k \cdot \xi, (\chi(g_k))^n f(\xi)) = g_k \underset{(n)}{\circ} (\xi, f(\xi)) = (g_k \cdot \xi, f(g_k \cdot \xi))$$
La dernière partie de cette égalité converge vers $(\eta, f(\eta))$. On a alors en particulier $((\chi(g_k))^n f(\xi))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\eta)$. Donc $((\chi(g_k))^n)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\eta)(f(\xi))^{-1}$. Par conséquent, $((\chi(g_k))^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et puisque
$$g_k \underset{(-1)}{\circ} (\xi, \alpha) = (g_k \cdot \xi, (\chi(g_k))^{-1}\alpha)$$
Cela montre bien que $\overline{G \underset{(-1)}{\circ} (\xi, \alpha)} \cap (X \times \{0\}) = \varnothing$.
Réciproquement, supposons que $\overline{G \underset{(-1)}{\circ} (\xi, \alpha)} \cap (X \times \{0\}) = \varnothing$. Alors, d'après la proposition 1.3.1, il existe $h \in \mathbb{K}[L_{\chi^{-1}}]^G$ tel que $h_{|\overline{G\cdot(\xi,\alpha)}} = 1$ et $h_{|X\times\{0\}} = 0$.
Si on écrit
$$h = h_0 \otimes 1 + h_1 \otimes u + h_2 \otimes u^2 + \cdots + h_n \otimes u^n$$
avec $h_k \in \mathbb{K}[X]$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ et u un générateur de $\mathbb{K}[\mathbb{A}^1(\mathbb{K})] = \mathbb{K}[u]$.
Comme pour tout $g \in G$, $g \cdot h = h$, on a alors pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ et tout $(x, a) \in L_{\chi^{-1}}$,
$$h_k(g^{-1} \cdot x)(\chi(g))^k a^k = h_k(x) a^k$$
Donc
$$h_k(g \cdot x) = (\chi(g))^k h_k(x)$$
et donc on a bien que $h_k \in \mathbb{K}[X]^G_{\chi^k}$.
Comme $h_{|X\times\{0\}} = 0$, nous avons que $h_0 = 0$. De plus, comme $h_{|\overline{G\cdot(\xi,\alpha)}} = 1$, alors on a en particulier l'existence de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $h_k(\xi)$ est non-nul. Cela montre bien que ξ est χ-semi-stable.

ii. Les orbites $G \underset{(-1)}{\circ} (\xi, \alpha)$ et $G \cdot \xi$ s'identifient donc comme ξ est χ-stable, alors $G \cdot \xi$ est fermée et donc $G \cdot (\xi, \alpha)$ est fermée. De plus
$$\dim G \underset{(-1)}{\circ} (\xi, \alpha) = \dim G \cdot \xi = \dim G$$
car $\dim G_\xi = 0$.
Réciproquement, supposons que l'orbite $G \underset{(-1)}{\circ} (\xi, \alpha)$ soit fermée. Comme $G \cdot \xi$ s'identifie à $G \underset{(-1)}{\circ} (\xi, \alpha)$ alors
$$\dim G \cdot \xi = \dim G \underset{(-1)}{\circ} (\xi, \alpha) = \dim G$$

d'où $\dim G_\xi = 0$.
Il est évident que $G \underset{(-1)}{\circ} (\xi, \alpha) \cap X \times \{0\} = \varnothing$, alors d'après le premier point, le point ξ est χ-semi-stable et par définition il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe $f \in \mathbb{K}[X]^G_{\chi^n}$ tel que $f(\xi) \neq 0$.
Montrons pour conclure que l'orbite $G \cdot x$ est fermée pour tout $x \in D(f)$. Pour cela, nous allons considérer le fermé

$$Z = \{x \in D(f) \mid \dim G \cdot x < \dim G\}.$$

Comme Z et $G \cdot \xi$ sont disjoints, G-invariants et fermés, d'après la proposition 1.3.1 il existe $h \in \mathbb{K}[D(f)]^G$ tel que $h(\xi) = 1$ et $h_{|Z} = 0$. L'ouvert $D(fh)$ est G-invariant et contient ξ et les orbites pour l'action de G sur $D(fh)$ sont fermées car $Z \cap D(fh) = \varnothing$.

✠

Exemple 11. Pour l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ par multiplication scalaire dans l'exemple 8, la seule orbite fermée est l'origine dont le stabilisateur est $\mathbb{G}_m$ et donc de dimension strictement positive.
Il n'y a aucune orbite de dimension égale à celle de $\mathbb{G}_m$. En fait, toute orbite contient l'origine dans son adhérence. Donc si on prend $\chi = 1$ le caractère trivial alors l'ensemble des points stables $(\mathbb{A}^2(\mathbb{K}))^s$ est vide.

Exemple 12. Pour l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ dans l'exemple 9, l'origine est une orbite fermée mais sont stabilisateur est $\mathbb{G}_m$ et donc de dimension strictement positive.
Pour $a, b \neq 0$, l'orbite $\mathbb{G}_m \cdot (a, b)$ est fermée et sont stabilisateur est égal à $\{1\}$ et donc de dimension nulle. Par conséquent, si on prend le caractère trivial $\chi = 1$, l'ensemble des points stables est

$$(\mathbb{A}^2(\mathbb{K}))^s = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \mid xy \neq 0\}.$$

2.5 Critères numériques de (semi-)stabilité

Les critères topologiques de (semi-)stabilité donnés dans la section précédente peuvent être reformulés en un critères numériques. Les résultats suivants donnent une motivation dans ce sens :

Lemme 2.5.1. *Soient G un groupe algébrique affine, $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ un caractère et $\gamma : \mathbb{G}_m \to G$ un sous-groupe à 1-paramètre. Alors, il existe un entier $\kappa \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{G}_m$,*

$$(\chi \circ \gamma)(t) = t^\kappa \tag{2.1}$$

Preuve. Provient du fait que les seuls endomorphismes de groupes algébriques $\mathbb{G}_m$ sont de la forme $t \mapsto t^\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ (Voir [9], Exemple 2.1). ✠

Théorème 2.5.2. *Soit G un groupe réductif agissant sur une variété affine X. Si $x \in X$ et $z \in \overline{G \cdot x} \backslash G \cdot x$, alors il existe un sous-groupe à 1-paramètre $\gamma : \mathbb{G}_m \to G$ tel que $\lim\limits_{t \to 0} \gamma(t) \cdot x$ existe et est égale à z.*

Démonstration. Voir [12], Théorème 1.5.1.4. ✠

On a alors les conditions nécessaires et suffisantes suivantes.

Proposition 2.5.3 (Critère de Hilbert-Mumford)**.**

i. Le point $\xi \in X$ est χ-semi-stable si et seulement si pour tout sous-groupe à 1-paramètre $\gamma : \mathbb{G}_m \to G$ pour lequel $\lim\limits_{t\to 0} \gamma(t)\cdot\xi$ existe, l'entier $\kappa \in \mathbb{Z}$ vérifiant 2.1 est positif.

ii. Le point $\xi \in X$ est χ-stable si et seulement si pour tout sous-groupe à 1-paramètre $\gamma : \mathbb{G}_m \to G$ pour lequel $\lim\limits_{t\to 0} \gamma(t)\cdot\xi$ existe, l'entier $\kappa \in \mathbb{Z}$ vérifiant 2.1 est strictement positif.

Preuve. Soit $\gamma : \mathbb{G}_m \to G$ un sous-groupe à 1-paramètre pour lequel la limite $\lim\limits_{t\to 0} \gamma(t)\cdot\xi$ existe. On a pour tout $t \in \mathbb{G}_m$,

$$\gamma(t) \underset{(-1)}{\circ} (\xi,\alpha) = (\gamma(t)\cdot\xi, (\chi(\gamma(t)))^{-1}\alpha) = (\gamma(t)\cdot\xi, t^{-\kappa}\alpha)$$

Cela implique donc que l'existence de la limite $\lim\limits_{t\to 0} \gamma(t) \underset{(-1)}{\circ} (\xi,\alpha)$ revient à étudier le signe de l'entier κ.

i. D'après la proposition 2.4.3, le point ξ est χ-semi-stable si et seulement si

$$\lim_{t\to 0} \gamma(t) \underset{(-1)}{\circ} (\xi,\alpha) \notin X \times \{0\}.$$

Si $\kappa < 0$, alors on aura forcément

$$\lim_{t\to 0} \gamma(t) \underset{(-1)}{\circ} (\xi,\alpha) = \lim_{t\to 0}(\gamma(t)\cdot\xi, t^{-\kappa}\alpha) = (\lim_{t\to 0} \gamma(t)\cdot\xi, 0) \in X \times \{0\}.$$

ii. D'après la proposition 2.4.3, le point ξ est χ-stable si et seulement si l'orbite $G \underset{(-1)}{\circ} (\xi,\alpha)$ est fermée et $\dim G\cdot(\xi,\alpha) = \dim G$. Ce qui implique que la frontière $\overline{G \underset{(-1)}{\circ} (\xi,\alpha)} \setminus G \underset{(-1)}{\circ} (\xi,\alpha)$ est vide et donc que la limite $\lim\limits_{t\to 0} \gamma(t) \underset{(-1)}{\circ} (\xi,\alpha)$ n'existe pas. Ce qui revient à dire que l'entier κ est strictement positif.

✠

Maintenant, fixons $\mathbb{T} \subset G$ un tore maximal et notons $X^*(\mathbb{T})$ et $X_*(\mathbb{T})$ respectivement l'ensemble des caractères et l'ensemble des sous-groupes à 1-paramètre de $\mathbb{T}$. Grâce au lemme 2.5.1, on définit l'application bilinéaire et non-dégénérée

$$\begin{array}{cccc} <\cdot,\cdot> & : & X^*(\mathbb{T}) \times X_*(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & (\chi,\gamma) & \longmapsto & <\chi,\gamma>=\kappa \end{array}$$

De plus, si $\mathbb{T} \simeq (\mathbb{G}_m)^n$ est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a les identification naturelles

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & X_*(\mathbb{T}) \\ (m_1,\dots,m_n) & \longmapsto & \gamma : t \mapsto (t^{m_1},\dots,t^{m_n}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & X^*(\mathbb{T}) \\ (m_1, \ldots, m_n) & \longmapsto & \chi : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n} \end{array}$$

Ainsi l'application $< \cdot, \cdot >$ définie ci-dessus correspond au produit

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ ((m_1, \ldots, m_n), (m'_1, \ldots, m'_n)) & \longmapsto & m_1 m'_1 + \cdots + m_n m'_n. \end{array}$$

Par la suite, grâce au lemme 1.2.5 et comme on fait agir un groupe réductif, au lieu de travailler sur une variété affine on peut se ramener à un G-module rationnel V. L'action de $\mathbb{T}$ sur V donne la *décomposition en poids* suivante ([5] Proposition 3.12) :

$$V = \bigoplus_{\chi \in X^*(\mathbb{T})} V_\chi \tag{2.2}$$

où $V_\chi = \{v \in V \,|\, \forall g \in \mathbb{T}, g \cdot v = \chi(g) v\}$, pour tout $\chi \in X^*(\mathbb{T})$.
Il n'y a qu'un nombre fini de caractères χ tels que $V_\chi \neq 0$, appelés $\mathbb{T}$-*poids* de l'action de $\mathbb{T}$ sur V, ainsi, pour tout $v \in V$, on écrira $v = \sum_\chi v_\chi$.
En respectant cette décomposition, on définit pour tout $v \in V$,

$$\mathrm{wt}_{\mathbb{T}}(v) = \{\chi \in X^*(\mathbb{T}) \,|\, v_\chi \neq 0\}.$$

Définition 2.5.4. On définit le *cône des sous-groupes à* 1-*paramètre admissibles* pour $v \in V$ comme étant :

$$C_v = \bigcap_{\chi \in \mathrm{wt}_{\mathbb{T}}(v)} H_\chi$$

où $H_\chi = \{\gamma \in X_*(\mathbb{T}) \,|\, < \chi, \gamma > \geq 0\}$.

Remarque. Par construction de ce cône, un sous-groupe à 1-paramètre γ appartient à C_v si, et seulement si,

$$\lim_{t \to 0} \gamma(t) \cdot v = \sum_\chi \lim_{t \to 0} t^{<\chi, \gamma>} v_\chi$$

existe. On alors la proposition suivante :

Proposition 2.5.5 (Critère de Hilbert-Mumford pour les tores)**.** *Soient $\xi \in V$ et $\chi \in X^*(\mathbb{T})$ par lequel on linéarise l'action de $\mathbb{T}$ sur le G-module V. Alors*

i. Le point ξ est χ-semi-stable si et seulement si $C_\xi \subset H_\chi$;

ii. Le point ξ est χ-stable si et seulement si $C_\xi \backslash \{0\} \subset H_\chi^0$ où

$$H_\chi^0 = \{\gamma \in X_*(\mathbb{T}) \,|\, < \chi, \gamma >> 0\}.$$

Preuve. En utilisant le remarque précédente et la proposition 2.5.3, le point ξ est χ-semi-stable (resp. χ-stable) si et seulement si $< \chi, \gamma > \geq 0$ (resp. $< \chi, \gamma >> 0$). Donc si, et seulement si $C_\xi \subset H_\chi$ (resp. $C_\xi \backslash \{0\} \subset H_\chi^0$). ✠

Remarque.

- Si $\xi = 0$, alors $C_0 = \mathbb{Z}^n$ et donc 0 est instable pour tout caractère non trivial χ.
- En notation additive, si $\chi = 0$ est le caractère trivial alors $H_\chi = \mathbb{Z}^n$ et $H_\chi^0 = \varnothing$ et donc tous les points sont semi-stables.

De plus, comme tout sous-groupe à 1-paramètre de G est conjugué à un sous-groupe à 1-paramètre de $\mathbb{T}$ ([4], §2), on peut utiliser le critère ci-dessus afin de donner un critère de χ-(semi-)stabilité pour l'action de G.

Corollaire 2.5.6. *Soient $\xi \in V$ et $\chi \in X^*(G)$ par lequel on linéarise l'action de G sur le G-module V. Alors*

i. Le point ξ est χ-semi-stable si et seulement si pour tout $g \in G$, $C_{g\cdot\xi} \subset H_\chi$;

ii. Le point ξ est χ-stable si et seulement si pour tout $g \in G$, $C_{g\cdot\xi} \backslash \{0\} \subset H_\chi^0$.

Remarque. En reprenant les notations du corollaire ci-dessus, si $C_{g\cdot\xi} = \{0\}$ pour tout $g \in G$, alors ξ est χ-stable pour tout caractère χ. Ces points sont dits *fortement stables*. De plus, d'après la remarque précédente, si $\chi = 0$ est le caractère trivial, alors les points fortement stables sont les seuls points stables.

3

Stratification de Hesselink

Dans ce chapitre, nous allons étudier le lieu des points instables de la variété algébrique affine X à savoir, le cône nul.

3.1 Instabilité

Considérons l'action de G sur lui-même par conjugaison, elle induit alors une action de G sur $X_*(G)$ définie par

$$\begin{array}{ccc} G \times X_*(G) & \longrightarrow & X_*(G) \\ (g, \gamma) & \longmapsto & g\gamma g^{-1} \end{array}$$

Nous allons construire une norme $||\cdot||$ sur $X_*(G)$ telle que pour tout $g \in G$,

$$||g\gamma g^{-1}|| = ||\gamma||.$$

Soit $\mathbb{T} \subset G$ un tore maximal. Le *groupe de Weyl* sur $\mathbb{T}$ est le groupe fini W tel que $W = N_G(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ où $N_G(\mathbb{T})$ désigne le normalisateur de $\mathbb{T}$ dans G. Ce groupe agit sur $\mathbb{T}$ par conjugaison, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ccc} W \times \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ (\bar{h}, \tau) & \longmapsto & h\tau h^{-1} \end{array}$$

Elle vérifie bien les axiomes d'une action. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle ne dépend pas du choix d'un représentant d'une classe d'équivalence. En effet, soient h_1 et $h_2 \in N_G(\mathbb{T})$ tels que $\bar{h}_1 = \bar{h}_2$. Cela signifie que $h_1^{-1}h_2 \in \mathbb{T}$. On a alors pour tout $\tau \in \mathbb{T}$,

$$(h_1\tau h_1^{-1})(h_2\tau h_2^{-1})^{-1} = h_1\tau \underbrace{(h_1^{-1}h_2)}_{\in\mathbb{T}} \tau^{-1}h_2^{-1} = h_1(h_1^{-1}h_2)\tau\tau^{-1}h_2^{-1} = e$$

Cela induit une action action de W sur $X_*(\mathbb{T})$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} W \times X_*(\mathbb{T}) & \longrightarrow & X_*(\mathbb{T}) \\ (\bar{h}, \lambda) & \longmapsto & h\lambda h^{-1} \end{array}$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 3.1.1. *L'inclusion $X_*(\mathbb{T}) \subset X_*(G)$ induit une bijection entre l'ensemble des orbites $X_*(G)/G$ et l'ensemble des orbites $X_*(\mathbb{T})/W$.*

Preuve. Voir [11], Lemme 2.8. ✠

Par conséquent, définir la norme $||\cdot||$ est équivalent à fixer un tore maximal $\mathbb{T}$ et une norme sur $X_*(\mathbb{T})$ (qu'on notera aussi $||\cdot||$) telle que pour tout $\bar{h} \in W$,

$$||h\gamma h^{-1}|| = ||\gamma||, \qquad \gamma \in X_*(\mathbb{T}).$$

On sait aussi que $X_*(\mathbb{T})$ s'identifie à $\mathbb{Z}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on peut alors prendre la norme euclidienne et la moyenniser sur l'action du groupe de Weyl W afin de construire une norme qui est invariante par l'action de W. Autrement dit, pour tout $\gamma \in X_*(\mathbb{T})$,

$$||\gamma|| = \frac{1}{\mathrm{Card}(W)} \sum_{\bar{h} \in W} ||h\gamma h^{-1}||_2.$$

Remarque. On suppose, de plus, que pour tout $\gamma \in X_*(G)$, $||\gamma||^2 \in \mathbb{Z}$.

Exemple 13. Considérons le groupe réductif $GL_n(\mathbb{K})$ et le tore maximal $D_n(\mathbb{K})$ de matrices diagonales. Alors $N_{GL_n(\mathbb{K})}(D_n(\mathbb{K}))$ n'est autre que le groupe de matrices monômiales et le groupe de Weyl $N_{GL_n(\mathbb{K})}(D_n(\mathbb{K}))/D_n(\mathbb{K})$ s'identifie au groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ qui agit sur $D_n(\mathbb{K})$ en faisant permuter les éléments de la diagonale. Dans ce cas, en identifiant $\lambda \in X_*(D_n(\mathbb{K}))$ avec un élément $(m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, alors

$$||(m_1, \cdots, m_n)||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i^2}.$$

Cette norme est bel et bien invariante sous l'action du groupe de Weyl $\mathfrak{S}_n$.

Soit maintenant X une variété affine sur laquelle G agit et $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ un caractère non-trivial.

Définition 3.1.2. Soit $\xi \in X$ un point χ-instable. On définit

$$M^\chi(\xi) = \inf_\gamma \frac{<\chi, \gamma>}{||\gamma||} \tag{3.1}$$

où la borne inférieur est prise sur tout sous-groupe à 1-paramètre de G pour lequel la limite $\lim_{t \to 0} \gamma(t) \cdot \xi$ existe.
Un sous-groupe à 1-paramètre est dit χ-*adapté* à ξ si la borne inférieur est atteinte, c'est-à-dire

$$M^\chi(\xi) = \frac{<\chi, \gamma>}{||\gamma||} \tag{3.2}$$

On note

$$\Lambda^\chi(\xi) = \{\gamma \in X_*(G) \,|\, \gamma \text{ est indivisible et } \chi - \text{adapté à } \xi\}.$$

Proposition 3.1.3. *Soit $\xi \in V$ un point instable d'un $\mathbb{T}$-module rationnel V où $\mathbb{T} \simeq (\mathbb{G}_m)^n$ est un tore. On linéarise cette action par un caractère non-trivial χ. Alors $\Lambda^\chi(\xi)$ est un singleton.*

Preuve. Comme le point ξ est instable, alors d'après la proposition 2.5.5, le cône des sous-groupes à 1-paramètres admissibles C_ξ n'est pas contenu dans H_χ, ce qui implique en particulier que $< \chi, \gamma >< 0$. Par ailleurs, on a

$$M^\chi(\xi) = \inf_{\gamma \in C_\xi \backslash \{0\}} \frac{< \chi, \gamma >}{||\gamma||}$$

Comme $< \chi, \gamma >= ||\gamma|| \, ||\chi|| \cos \theta_{\gamma,\chi}$, où $\theta_{\gamma,\chi} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ est l'angle formé par γ et χ (vus comme des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ à coordonnées entières). On a alors

$$M^\chi(\xi) = \inf_{\gamma \in C_\xi \backslash \{0\}} \frac{||\gamma|| \, ||\chi|| \cos \theta_{\gamma,\chi}}{||\gamma||} = \inf_{\gamma \in C_\xi \backslash \{0\}} ||\chi|| \cos \theta_{\gamma,\chi} = ||\chi|| \cos \left(\sup_{\gamma \in C_\xi \backslash \{0\}} \theta_{\gamma,\chi} \right)$$

On cherche alors le sous-ensemble $R \subset C_\xi \backslash \{0\}$ de sous-groupes à 1-paramètres admissibles dont les éléments (vus comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées entières) forment un angle maximal avec χ. Dans ce cas, soit R est soit engendré par $-\chi$, soit il existe $\rho \in \mathrm{wt}_{\mathbb{T}}(\xi)$ tel que pour tout $\gamma \in R$, $< \rho, \gamma >= 0$.

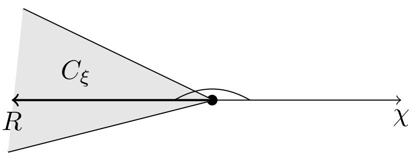


FIGURE 3.1 – Premier cas pour R

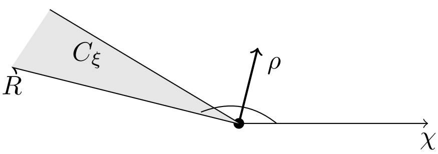


FIGURE 3.2 – Second cas pour R

Dans les deux cas R est engendré par un point à coordonnées entières et donc contient un unique point qui correspond à un sous-groupe à 1-paramètre indivisible. ✠

Remarque. En reprenant les notations de la proposition précédente, puisque deux tores maximaux de G sont conjugués et comme pour tout $g \in G$,

$$< \chi, g\gamma g^{-1} >=< \chi, \gamma >, \tag{3.3}$$

on en déduit que pour calculer les valeurs possibles de M^χ on peut fixer un tore maximal et calculer

$$\inf_{\lambda \in C_\xi \backslash \{0\}} \frac{< \chi, \gamma >}{||\gamma||}, \tag{3.4}$$

avec $\xi \in V$. En particulier, l'application $M^\chi : V \to \mathbb{R}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et $\Lambda^\chi(\xi)$ est non-vide pour tout point χ-instable ξ.

Définition 3.1.4. Soit $\gamma \in X_*(G)$, on définit le *sous-groupe parabolique* de G comme étant :

$$P(\gamma) = \left\{ g \in G \,|\, \lim_{t \to 0} \gamma(t) g \gamma(t^{-1}) \text{ existe dans } G \right\}$$

Il est aisé de voir qu'il s'agit bien d'un sous-groupe de G. On a alors les résultats suivants :

Théorème 3.1.5 (Kempf)**.** *Si $\xi \in X$ est χ-instable, alors* *i.* *Pour tout* $g \in G$,

$$\Lambda^\chi(g \cdot \xi) = g\Lambda^\chi(\xi)g^{-1};$$

ii. *Il existe un sous-groupe parabolique* $P(\xi, \chi)$ *tel que pour tout* $\gamma \in \Lambda^\chi(\xi)$

$$P(\xi, \chi) = P(\gamma);$$

iii. *Tous les éléments de* $\Lambda^\chi(\xi)$ *sont conjugués entre eux par des éléments de* $P(\xi, \chi)$. *De plus, le stabilisateur* G_ξ *est contenu dans* $P(\xi, \chi)$ *;*

iv. *Soit* $\mathbb{T} \subset P(\xi, \chi)$ *un tore maximal de* G*, alors il existe un unique sous-groupe à* 1*-paramètre de* $\mathbb{T}$ *qui appartient à* $\Lambda^\chi(\xi)$ *;*

v. *Si* $\gamma \in \Lambda^\chi(\xi)$ *et* $z = \lim\limits_{t \to 0} \gamma(t) \cdot \xi$*, alors* $\gamma \in \Lambda^\chi(z)$.

Démonstration.

i. Cela provient du fait que la norme $|| \cdot ||$ est invariante par conjugaison et de la relation 3.3.

ii. iii. iv. Voir [7] Théorème 2.2.

v. Soient $\gamma \in \Lambda^\chi(\xi)$ et $z = \lim\limits_{t \to 0} \gamma(t) \cdot \xi$. Par définition,

$$M^\chi(z) = \inf_\lambda \frac{< \chi, \lambda >}{||\lambda||}.$$

Comme γ vérifie l'existence de la limite $\lim\limits_{t \to 0} \gamma(t) \cdot z$ et que la valeur $\frac{<\chi,\gamma>}{||\gamma||}$ est minimale, alors on a forcément

$$M^\chi(z) = \frac{< \chi, \gamma >}{||\gamma||}.$$

D'où $\gamma \in \Lambda^\chi(z)$.

✠

3.2 Stratification de Hesselink du cône nul

Soit V un G-module rationnel linéarisé par un caractère χ. Grâce à la notion de sous-groupes à 1-paramètres adapté à un caractère χ, on exhibera une stratification du cône nul $N = X \backslash X^{\chi-ss}$, appelée *stratification de Hesselink*. On entend par stratification une décomposition finie pour laquelle il y a un ordre partiel stricte sur les indices de la décomposition de telle sorte que la frontière d'un *stratum* (un élément de la décomposition) est l'union de strata de plus grand indice.

Définition 3.2.1. Soit $\gamma \in X_*(G)$ et $G \cdot \gamma$ l'orbite de γ pour l'action de G sur $X_*(G)$ par conjugaison. On définit

$$S_{G \cdot \gamma} = \{v \in N \,|\, \Lambda^\chi(v) \cap G \cdot \gamma \neq \varnothing\} = \{v \in N \,|\, \exists g \in G,\, g\gamma g^{-1} \in \Lambda^\chi(v)\} \tag{3.5}$$

On définit les *lames* de $S_{G\cdot\gamma}$ par

$$S_\gamma = \{v \in N \,|\, \gamma \in \Lambda^\chi(v)\} \subset S_{G\cdot\gamma} \tag{3.6}$$

Enfin, *l'ensemble limite* de la lame S_γ est donné par

$$Z_\gamma = \{v \in N \,|\, \gamma \in \Lambda^\chi(v) \text{ et } \mathrm{Im}\gamma \subset G_v\} \subset S_\gamma \tag{3.7}$$

Lemme 3.2.2. *Soit $\gamma \in X_*(G)$ et $G \cdot \gamma$ l'orbite de γ pour l'action de G sur $X_*(G)$ par conjugaison.*

i. $S_{G\cdot\gamma} = G \cdot S_\gamma$ *;*

ii. Il n'y a qu'un nombre fini de $S_{G\cdot\gamma}$ qui sont non-vides.

Preuve.

i. Soit $g \cdot v \in G \cdot S_\gamma$. Par définition, $\gamma \in \Lambda^\chi(v)$ donc par i. du théorème 3.1.5, on a $g\gamma g^{-1} \in g\Lambda^\chi(v)g^{-1} = \Lambda^\chi(g \cdot v)$. Ce qui signifie que $g \cdot v \in S_{G\cdot\gamma}$.
Réciproquement, soit $v \in S_{G\cdot\gamma}$. Il existe alors $g \in G$ tel que $g\gamma g^{-1} \in \Lambda^\chi(v)$. Posons $w = g^{-1} \cdot v$. On a donc $v = g \cdot w$, montrons donc que $w \in S_\gamma$. Comme $g\gamma g^{-1} \in \Lambda^\chi(v)$, alors par i. du théorème 3.1.5, $g\gamma g^{-1} \in \Lambda^\chi(g \cdot w) = g\Lambda^\chi(w)g^{-1}$, d'où $\gamma \in \Lambda^\chi(w)$.

ii. On fixe un tore maximal $\mathbb{T} \subset G$. On sait qu'un sous-groupe à 1-paramètre de G est conjugué à un sous-groupe à 1-paramètre de $\mathbb{T}$, de plus, d'après le premier point, il suffit de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de lames S_γ qui sont non-vides pour $\gamma \in X_*(\mathbb{T})$.
D'après la preuve de la proposition 3.1.3, le caractère χ détermine le rayon de sous-groupes à 1-paramètre adaptés à un point donné, on voit alors qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes à 1-paramètre indivisibles possible qui peuvent être χ-adaptés aux points instables. En particulier, il n'y a qu'un nombre fini de S_γ possibles.

✠

Définition 3.2.3. Soit $\gamma \in X_*(G)$ et $G \cdot \gamma$ l'orbite de γ pour l'action de G sur $X_*(G)$ par conjugaison. On appelle *rétraction* l'application

$$\begin{array}{rccc} p_\gamma & : & S_\gamma & \longrightarrow & Z_\gamma \\ & & v & \longmapsto & \lim_{t\to 0} \gamma(t) \cdot v \end{array}$$

On définit alors un ordre partiel strict sur $X_*(G)/G$ par

$$G \cdot \gamma < G \cdot \gamma' \qquad \text{si} \qquad \frac{<\chi, \gamma>}{||\gamma||} > \frac{<\chi, \gamma'>}{||\gamma'||}.$$

Remarque. Cet ordre revient à dire que

$$G \cdot \gamma < G \cdot \gamma' \qquad \text{si} \qquad M^\chi(v) > M^\chi(v') \text{ pour } v \in S_{G\cdot\gamma} \text{ et } v' \in S_{G\cdot\gamma'}.$$

Dans tout ce qui suit, notre but est de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.2.4 (Hesselink)**.** *Il existe une décomposition du cône nul*

$$N = \bigsqcup_{G\cdot\gamma} S_{G\cdot\gamma} \tag{3.8}$$

en un nombre fini de sous-ensembles disjoints, invariants par l'action de G et localement fermés de V. De plus, l'ordre partiel strict décrit la frontière d'un stratum donnée, c'est-à-dire, si on a

$$(\overline{S_{G\cdot\gamma}} \backslash S_{G\cdot\gamma}) \cap S_{G\cdot\gamma'} \neq \varnothing,$$

alors $G \cdot \gamma < G \cdot \gamma'$.

Soit $\gamma \in X_*(G)$ et $G \cdot \gamma$ l'orbite de γ pour l'action de G sur $X_*(G)$ par conjugaison. La décomposition en poids 2.2 et le lemme 2.5.1, nous permettent d'obtenir la décomposition suivante de V :

$$V = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V_r \tag{3.9}$$

où pour tout $r \in Z$, $V_r = \{v \in V \,|\, \gamma \cdot v = t^r v\}$. Notons $V^\gamma = V_0$ l'ensemble des points fixés par l'action de $\mathrm{Im}(\gamma) \subset G$ sur V et

$$V_+^\gamma = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} V_r = \{v \in V \mid \lim_{t \to 0} \gamma(t) \cdot v \text{ existe}\}.$$

Les deux sous-ensembles V^γ et V_+^γ sont des fermés de V. Il y a une projection

$$\begin{array}{cccccc} p_\gamma & : & V_+^\gamma & \longrightarrow & V^\gamma \\ & & v & \longmapsto & \lim_{t \to 0} \gamma(t) \cdot v \end{array}$$

Remarquons que l'on a de manière évidente que $S_\gamma \subset V_+^\gamma$ et $Z_\gamma \subset V^\gamma$.

Définissons le sous-groupe

$$G_\gamma = \{g \in G \,|\, \forall t \in \mathbb{G}_m,\ \gamma(t) g = g \gamma(t)\}.$$

Comme $G_\gamma = C_G(\mathrm{Im}(\gamma))$ alors par le corollaire 26.2.A dans [6], ce sous-groupe est réductif. Il agit sur le fermé des points fixés par l'action de $\mathrm{Im}(\gamma)$

$$V_\gamma = \{v \in V \,|\, \mathrm{Im}(\gamma) \subset G_v\}.$$

Lemme 3.2.5. *Soit $v \in V^\gamma$. On a alors*

$$M_G^\chi(v) = M_{G_\gamma}^\chi(v).$$

Autrement dit, la borne inférieur de la quantité $\frac{<\chi,\lambda>}{||\lambda||}$ prise pour les sous-groupes à 1-paramètre de G pour lesquels la limite $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot v$ existe, est la même que celle prise pour des sous-groupes à 1-paramètre de G_γ pour lesquels la limite $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot v$ existe.

Preuve. Par le point ii. du théorème 3.1.5, si $\lambda \in \Lambda^\chi(v)$, alors λ est un sous-groupe à 1-paramètre du sous-groupe parabolique $P(v, \chi)$ (c'est-à-dire $\lambda \in X_*(P(v, \chi))$) et par iii. du même théorème, $G_v \subset P(v, \chi)$ et donc comme $v \in V^\gamma$, alors γ est un sous-groupe à 1-paramètre de $P(v, \chi)$.
Fixons un tore maximal $\mathbb{T} \subset P(v, \chi)$ tel que γ soit un sous-groupe à 1-paramètre de $\mathbb{T}$. Puisque tout-sous-groupe à 1-paramètre de $P(v, \chi)$ est conjugué à un sous-groupe à 1-paramètre de $\mathbb{T}$, alors il existe $p \in P(v, \chi)$ tel que $p\lambda p^{-1}$ soit un sous-groupe à 1-paramètre de $\mathbb{T}$. Comme $\mathbb{T}$ est commutatif, cela signifie que $p\lambda p^{-1}$ et γ commutent et donc $p\lambda p^{-1} \in X_*(G_\lambda) \cap \Lambda^\chi(v)$. Ce qui prouve le lemme. ✠

On peut utiliser un caractère χ_γ de G_γ afin de linéariser l'action de G_γ sur V^γ. On note $\gamma^* \in X^*(G_\gamma)$ le dual du sous-groupe à 1-paramètre $\gamma \in X_*(G_\gamma)$. En utilisant une notation additive pour le groupe des caractères, on définit le caractère de G_γ :

$$\chi_\gamma = ||\gamma||^2 \chi - < \chi, \gamma > \gamma^*.$$

Proposition 3.2.6. *L'ensemble limite Z_γ est égal à l'ensemble $(V^\gamma)^{\chi_\gamma - ss}$ des points χ_γ-semi-stable pour l'action de G_γ sur V^γ.*

Preuve. Soit $v \in V^\gamma$. Supposons que γ n'est pas χ-adapté à v et donc $v \notin Z_\gamma$. Alors il existe un sous-groupe à 1-paramètre λ pour lequel la limite $\lim_{t\to 0} \gamma(t) \cdot v$ existe et tel que

$$\frac{<\chi, \lambda>}{||\lambda||} < \frac{<\chi, \gamma>}{||\gamma||}. \tag{3.10}$$

Par le lemme 3.2.5, on peut supposer que λ est un sous-groupe à 1-paramètre de G_γ. Par définition de χ_γ, on a

$$<\chi_\gamma, \lambda> = ||\gamma||^2 <\chi, \lambda> - <\chi, \gamma><\gamma^*, \lambda> .$$

L'inégalité 3.10 donne

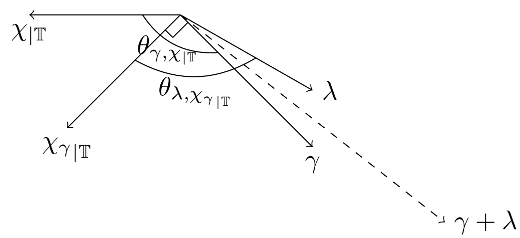
$$<\chi_\gamma, \lambda> \quad < \quad <\chi, \gamma> (||\gamma||||\lambda|| - <\gamma^*, \lambda>) .$$

Puis, comme $<\gamma^*, \lambda> = ||\gamma||||\lambda|| \cos\theta_{\gamma,\lambda}$ et $<\chi, \lambda> < 0$, on a

$$<\chi_\gamma, \lambda> \quad < \quad <\chi, \gamma> (||\gamma||||\lambda|| - <\gamma^*, \lambda>) < 0,$$

ce qui implique, par la proposition 2.5.3, que v n'est pas χ_γ-semi-stable.
Pour l'autre inclusion, supposons que v est χ_γ-instable. Il existe alors un sous-groupe à 1-paramètre λ de G_γ tel que $<\chi_\gamma, \lambda> < 0$. Soit $\mathbb{T} \subset G_\gamma$ un tore maximal contenant $\mathrm{Im}(\gamma)$ et $\mathrm{Im}(\lambda)$. On a alors $\gamma \in X_*(\mathbb{T})$ et $\lambda \in X_*(\mathbb{T})$ et on alors les considérer comme des vecteurs à coordonnées entières. De plus, on peut aussi considérer les caractères $\chi_{|\mathbb{T}}$ et $\chi_{\gamma|\mathbb{T}}$ comme des vecteurs à coefficients entiers. Par définition de $\chi_{\gamma|\mathbb{T}}$, ce vecteur est contenu à l'intérieur du cône engendré par $\chi_{|\mathbb{T}}$ et γ et il est orthogonal à γ car

$$<\chi_\gamma, \gamma> = ||\gamma||^2 <\chi, \gamma> - <\chi, \gamma><\gamma^*, \gamma> = 0$$



Comme $<\chi, \gamma> < 0$ et $<\chi_\gamma, \lambda> < 0$, alors les angles $\theta_{\gamma,\chi_{|\mathbb{T}}}$ et $\theta_{\lambda,\chi_{\gamma|\mathbb{T}}}$ sont au moins égaux à $\frac{\pi}{2}$. Donc

$$\theta_{\gamma+\lambda,\chi_{|\mathbb{T}}} > \theta_{\gamma,\chi_{|\mathbb{T}}} > \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$\frac{<\chi_{|\mathbb{T}}, \gamma+\lambda>}{||\gamma+\lambda||} = ||\chi_{|\mathbb{T}}|| \cos(\theta_{\gamma+\lambda,\chi_{|\mathbb{T}}}) < ||\chi_{|\mathbb{T}}|| \cos(\theta_{\gamma,\chi_{|\mathbb{T}}}) = \frac{<\chi_{|\mathbb{T}}, \gamma>}{||\gamma||}.$$

Ce qui montre que γ n'est pas χ-adapté à v. ✠

Lemme 3.2.7. *On a*

$$S_\gamma = p_\gamma^{-1}(Z_\gamma).$$

De plus S_γ est localement fermé dans V.

Preuve. Par le point v. du théorème 3.1.5, si $v \in S_\gamma$, alors $p_\gamma(v) \in Z_\gamma$. Pour l'autre inclusion, prenons $v \in V_+^\gamma$ tel que $p_\gamma(v) \in Z_\gamma$ et supposons que $v \notin S_\gamma$. Pour cette dernière hypothèse, on a que $\gamma \notin \Lambda^\chi(v)$. Mais comme $\Lambda^\chi(v)$ est non-vide, alors on peut trouver un sous-groupe à 1-paramètre λ pour lequel la limite $\lim\limits_{t\to 0} \lambda(t)\cdot v$ existe et qui soit χ-adapté à v. Dans ce cas, on a l'inégalité

$$\frac{<\chi,\lambda>}{||\lambda||} < \frac{<\chi,\gamma>}{||\gamma||} \tag{3.11}$$

D'un autre côté, comme $z = p_\gamma(v) \in Z_\gamma$ alors $\gamma \in \Lambda^\chi(z)$. De plus, le fait que $\lambda \in \Lambda^\chi(v)$ implique par le point v. du théorème 3.1.5 que $\lambda \in \Lambda^\chi(z)$ et donc on a

$$\frac{<\chi,\lambda>}{||\lambda||} = \frac{<\chi,\gamma>}{||\gamma||}$$

ce qui contredit l'inégalité 3.11.

Enfin, par la proposition 3.2.6, on sait que Z_γ est un ouvert de V^γ et comme $S_\gamma = p_\gamma^{-1}(Z_\gamma)$, alors S_γ est localement fermé. ✠

Démonstration du théorème 3.2.4. Par le point ii. du lemme 3.2.2, on sait qu'il y a un nombre fini de strata dans la décomposition 3.8.

Soient γ et λ deux sous-groupes à 1-paramètre de G tels que $G\cdot\gamma \neq G\cdot\lambda$. Par le point i. du lemme 3.2.2, on a $S_{G\cdot\gamma} = G\cdot S_\gamma$ et $S_{G\cdot\lambda} = G\cdot S_\lambda$. Supposons qu'il existe un élément $v \in S_\gamma \cap S_\lambda$. Cela signifie que $\gamma \in \Lambda^\chi(v)$ et $\lambda \in \Lambda^\chi(v)$. Donc

$$\frac{<\chi,\gamma>}{||\gamma||} = \frac{<\chi,\lambda>}{||\lambda||}$$

et donc γ et λ sont conjugués et appartiennent à la même orbite, ce qui est contradictoire. Cela montre donc que les strata sont disjoints.

Par la suite, soient $v \in S_{G\cdot\gamma}$ et $g \in G$. Par le point i. du théorème 3.1.5, on a

$$\Lambda^\chi(g\cdot v) \cap G\cdot\gamma = g\Lambda g^{-1} \cap G\cdot\gamma \neq \varnothing,$$

ce qui montre que le stratum $S_{G\cdot\gamma}$ est invariant pour l'action de G.

Montrons maintenant que les strata sont localement fermés. En effet, par la proposition 3.2.6 et le lemme 3.2.7, on sait que l'ensemble limite Z_γ est un ouvert de V^γ et que $S_\gamma = p_\gamma^{-1}(Z_\gamma)$ est localement fermé. A partir de là on conclut que $S_{G\cdot\gamma} = G\cdot S_\gamma$ est localement fermé.

Enfin, remarquons que comme $S_{G\cdot\gamma}$ est contenu dans le fermé $G\cdot V_+^\lambda$, alors son adhérence $\overline{S_{G\cdot\gamma}}$ l'est aussi. Si on prend $v \in (\overline{S_{G\cdot\gamma}}\backslash S_{G\cdot\gamma}) \cap S_{G\cdot\gamma'}$, on a $z = g\cdot v \in V_+^\gamma$ et $z \in S_{G\cdot\gamma'}$. De plus, comme la limite $\lim\limits_{t\to 0}\gamma(t)\cdot z$ existe, alors

$$M^\chi(v) = M^\chi(z) = \frac{<\chi,\gamma'>}{||\gamma'||} < \frac{<\chi,\gamma>}{||\gamma||}.$$

Ce qui implique que $G\cdot\gamma < G\cdot\gamma'$. ✠

Remarque. Si on fixe un tore maximal $\mathbb{T} \subset G$, alors chaque classe de conjugaison $G \cdot \gamma$ possède un représentant qui est un sous-groupe à 1-paramètre de $\mathbb{T}$. Par conséquent, afin de calculer les indices $G \cdot \gamma$ intervenant dans la stratification de Hesselink, on peut calculer le sous-groupe à 1-paramètre de $\mathbb{T}$ qui sont χ-adaptés aux points χ-instables pour l'action de $\mathbb{T}$. Pour se faire, on peut suivre un procédé analogue à celui décrit dans la preuve de la proposition 3.1.3.

Exemple 14. On fait agir $GL_2(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^2$ par

$$\begin{array}{ccc} GL_2(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \end{array}$$

Fixons le tore $D_2(\mathbb{K})$ des matrices diagonales et $\chi = \det$ le caractère linéarisant cette action. Un sous-groupe à 1-paramètre γ de $D_2(\mathbb{K})$ est de la forme :

$$\begin{array}{cccc} \gamma_{ps} & : & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & D_2(\mathbb{K}) \\ & & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t^p & 0 \\ 0 & t^s \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $p, s \in \mathbb{Z}$. Comme on a pour tout $t \in \mathbb{G}_m$,

$$\gamma(t) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^p x \\ t^s y \end{pmatrix}$$

alors pour que la limite $\lim\limits_{t \to 0} \gamma(t) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ existe et pour que $< \det, \lambda >= p + s$ soit strictement négatif, il faut et il suffit de prendre les points $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. L'ensemble des points instables est donné par les deux axes. Cherchons les sous-groupes à 1-paramètre det-adaptés à ces points. Si on fixe la norme euclidienne $||\cdot||$ sur $X_*(D_2(\mathbb{K}))$, on calcule les $p, s \in \mathbb{Z}$ pour lesquels la quantité $\frac{<\det, \gamma_{ps}>}{||\gamma_{ps}||}$ est minimale. On a

$$\frac{< \det, \gamma_{ps} >}{||\gamma_{ps}||} = \frac{p+s}{\sqrt{p^2+s^2}}$$

Cette quantité est minimisée pour $p = s$ et vaut dans ce cas $-\sqrt{2}$. Comme le sous-groupe à 1-paramètre γ_{pp} est indivisible, alors la seule valeur possible de p est -1. Ce qui nous donne la stratification

$$N = S_{G \cdot \gamma_{(-1)(-1)}}.$$

4

Un exemple : représentation de carquois

Nous allons utiliser les résultats du chapitre précédent afin de réinterpréter la notion de (semi-)stabilité pour les représentations de carquois. Mais avant, nous allons rappeler quelques notions de base.

4.1 Généralités sur les carquois

Définition 4.1.1. On appelle *carquois* la donnée de deux ensembles finis Q_0 et Q_1 appelés respectivement *points* et *flèches* du carquois, ainsi que deux applications $\alpha, \beta : Q_1 \to Q_0$ appelées respectivement *source* et *but*. On écrit

$$Q = (Q_0, Q_1, \alpha, \beta).$$

Définition 4.1.2. Soit $Q = (Q_0, Q_1, \alpha, \beta)$ un carquois. On appelle *représentation de Q* la donnée d'une famille $(V_q)_{q \in Q_0}$ de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies ainsi qu'une famille d'applications linéaires $\big(\phi_s : V_{\beta(s)} \to V_{\alpha(s)}\big)_{s \in Q_1}$. On écrit

$$V = (V_q, \phi_s)_{(q,s) \in Q_0 \times Q_1}.$$

Le *vecteur dimension* $\delta \in \mathbb{N}^{\mathrm{Card}(Q_0)}$ d'une telle représentation est donné par

$$\delta_q = \dim V_q, \qquad q \in Q_0.$$

Définition 4.1.3. Soit $Q = (Q_0, Q_1, \alpha, \beta)$ un carquois et $V = (V_q, \phi_s)_{(q,s) \in Q_0 \times Q_1}$ une représentation de carquois de vecteur dimension δ. On appelle *sous-représentation* de V la donnée d'une famille $(W_q)_{q \in Q_0}$ de sous-espaces vectoriels avec la famille d'applications linéaires $\Big(\phi_{s|W_{\beta(s)}} : W_{\beta(s)} \to W_{\alpha(s)}\Big)_{s \in Q_1}$.

Définition 4.1.4. Soit $Q = (Q_0, Q_1, \alpha, \beta)$ un carquois, $V = (V_q, \phi_s)_{(q,s) \in Q_0 \times Q_1}$ une représentation de carquois et $W = (W_q, \phi_{s|W_{\beta(s)}})_{(q,s) \in Q_0 \times Q_1}$ une sous-représentation de V. On appelle *quotient* de la représentation V par la sous-représentation W la famille $(V_q/W_q)_{q\in Q_0}$ d'espaces vectoriels quotient avec la famille d'applications linéaires

$$\left(\begin{array}{cccc} \overline{\phi}_s & : & V_{\beta(s)}/W_{\beta(s)} & \longrightarrow & V_{\alpha(s)}/W_{\alpha(s)} \\ & & \overline{v} & \longmapsto & \overline{\phi_s(v)} \end{array}\right)_{s\in Q_1}$$

Définition 4.1.5. Soit $Q=(Q_0,Q_1,\alpha,\beta)$ un carquois, $V=(V_q,\phi_s)_{(q,s)\in Q_0\times Q_1}$ et $V'=(V'_q,\phi'_s)_{(q,s)\in Q_0\times Q_1}$ deux représentations de carquois. On appelle *morphisme de représentations de carquois* la donnée, pour tout $q\in Q_0$, d'applications linéaires $f_q : V_q \to V'_q$ telles que pour tout $s\in Q_1$, $f_{\alpha(s)}\circ\phi_s=\phi'_s\circ f_{\beta(s)}$. Un tel morphisme est un isomorphisme si et seulement si, pour tout $q\in Q_0$, f_q est un isomorphisme.

Soit $Q=(Q_0,Q_1,\alpha,\beta)$ un carquois. On fixe $(\delta_q)_{q\in Q_0}$ un tuple d'entiers. L'espace vectoriel des représentations de carquois de vecteur dimension δ est donné par

$$\mathcal{R}(Q,\delta)=\bigoplus_{s\in Q_1}\mathrm{Hom}(V_{\beta(s)},V_{\alpha(s)})$$

De plus, le groupe

$$GL(Q,\delta)=\prod_{q\in Q_0}GL(V_q)$$

agit sur $\mathcal{R}(Q,\delta)$ par

$$(g\cdot\phi)_s=g_{\alpha(s)}\circ\phi_s\circ g^{-1}_{\beta(s)}. \tag{4.1}$$

Remarque. Le groupe $GL(Q,\delta)$ contient une copie du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ par l'injection $t\mapsto(t\,\mathrm{Id}_{V_q})_{q\in Q_0}$.

4.2 Semi-stabilité dans $\mathcal{R}(Q,\delta)$

Soit $Q=(Q_0,Q_1,\alpha,\beta)$ un carquois. Linéarisons l'action donnée par 4.1 en choisissant un caractère $GL(Q,\delta)\to\mathbb{G}_m$. Pour cela, commençons par fixer $\delta=(\delta_q)_{q\in Q_0}$ un vecteur d'entiers naturels. Puis, notons $\theta=(\theta_q)\in\mathbb{Z}^{\mathrm{Card}(Q_0)}$ le tuple d'entiers tel que

$$\sum_{q\in Q_0}\theta_q\delta_q=0 \tag{4.2}$$

et associons à θ le caractère $\chi_\theta : GL(Q,\delta)\to\mathbb{G}_m$ donné par

$$(g_q)_{q\in Q_0}\longmapsto\prod_{q\in Q_0}\det(g_q)^{\theta_q}, \tag{4.3}$$

où $g_q\in GL(V_q)$ pour tout $q\in Q_0$.

Enfin, pour $V=(V_q,\phi_s)_{(q,s)\in Q_0\times Q_1}$ une représentation de carquois, notons

$$\theta(V)\overset{\text{déf}}{=}\sum_{q\in Q_0}\theta_q\dim(V_q)$$

Définition 4.2.1. Soit $Q = (Q_0, Q_1, \alpha, \beta)$ un carquois.
La représentation de carquois $V = (V_q, \phi_s)_{(q,s)\in Q_0\times Q_1}$ est dite *θ-semi-stable* si pour toute sous-représentation propre $W = (W_q, \phi_{s|W_q})_{(q,s)\in Q_0\times Q_1}$ de V, on a

$$\theta(W) \geq 0. \tag{4.4}$$

Nous allons utiliser, par la suite, le critère de Hilbert-Mumford afin de mettre en relation la notion de θ-semi-stabilité et celle de χ_θ-semi-stabilité.

Considérons $\gamma : \mathbb{G}_m \to GL(Q,\delta)$ un sous-groupe à 1-paramètre. On sait que pour tout $q \in Q_0$, on a la décomposition en poids

$$V_q = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_q^{(n)}, \tag{4.5}$$

où $V_q^{(n)} = \{v \in V_q \,|\, \forall t \in \mathbb{G}_m,\ (\gamma(t))_q(v) = t^n v\}$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les *filtrations* suivantes

$$V_q^{(\geq n)} = \bigoplus_{k\geq n} V_q^{(k)}. \tag{4.6}$$

Proposition 4.2.2. *En reprenant les notations ci-dessus, sous l'action de $Im(\gamma)$, les composantes $\phi_s^{(mn)} : V_{\beta(s)}^{(n)} \to V_{\alpha(s)}^{(m)}$ sont multipliées par t^{m-n}.*

Preuve. Soit $v \in V_{\beta(s)}^{(n)}$. Par définition, $(\gamma(t))_{\beta(s)}(v) = t^n v$. Donc $\gamma(t)_{\beta(s)}^{-1}(v) = t^{-n}v$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(\gamma(t)\cdot\phi^{(mn)})_s(v) &= \left((\gamma(t))_{\alpha(s)} \circ \phi_s^{(mn)} \circ (\gamma(t))_{\beta(s)}^{-1}\right)(v) \\
&= \left((\gamma(t))_{\alpha(s)} \circ \phi_s^{(mn)}\right)(t^{-n}v) \\
&= t^{-n}\left((\gamma(t))_{\alpha(s)} \circ \phi_s^{(mn)}\right)(v) \\
&= t^{-n}t^m\phi_s^{(mn)}(v) \\
&= t^{m-n}\phi_s^{(mn)}(v)
\end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité vient du fait que $\phi_s^{(mn)}(v) \in V_{\alpha(s)}^{(m)}$. ✠

Comme on a pour tout $s \in Q_1$ et tout $v \in V_\beta$, on a

$$\phi_s(v) = \phi_s\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_s^{(mn)}(v_n),$$

par conséquent, $\lim_{t\to 0}\gamma(t)\cdot\phi$ existe si, et seulement si, pour tout $s \in Q_1$, $\phi_s^{(mn)} = 0$, pour tous $m < n$. Ceci est équivalent au fait que ϕ_s donne lieu à une application $\phi_{s|V_{\beta(s)}^{(\geq n)}} : V_{\beta(s)}^{(\geq n)} \to V_{\alpha(s)}^{(\geq n)}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Cela signifie alors que ϕ détermine des sous-représentations $V_n = \left(V_q^{(\geq n)}, \phi_{s|V_{\beta(s)}^{(\geq n)}}\right)_{(q,s)\in Q_0\times Q_1}$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$.

En résumé, un sous-groupe à 1-paramètre $\gamma : \mathbb{G}_m \to GL(Q,\delta)$ pour lequel la limite $\lim_{t\to 0} \gamma(t)\cdot\phi_s$ existe détermine une filtration

$$V \supseteq \cdots \supseteq V_n \supseteq V_{n+1} \supseteq \cdots \supseteq 0$$

indexée par $\mathbb{Z}$. De plus, réciproquement, il est évident qu'une telle $\mathbb{Z}$-filtration est associée à un sous-groupe à 1-paramètre γ (pas nécessairement unique) pour lequel la limite $\lim_{t\to 0} \gamma(t)\cdot\phi$ existe.

De plus, par la preuve de la proposition 4.2.2, la limite ci-dessus est non-nulle pour $m = n$ et donc pour $\phi_s^{(nn)}$. Mais, comme on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $V_q^{(n)} \simeq V_q^{(\geq n)}/V_q^{(\geq n+1)}$, alors

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(V_q^{(n)}, \phi_s^{(nn)}\right)_{(q,s)\in Q_0\times Q_1} \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V^{(n)}/V^{(n+1)} \tag{4.7}$$

Proposition 4.2.3. *Soit γ un sous-groupe à 1-paramètre de $GL(Q,\delta)$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration associée à γ. Alors*

$$< \chi_\theta, \gamma > = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(V_n) \tag{4.8}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \chi_\theta(\gamma(t)) &= \prod_{q\in Q_0} \det(\gamma(t)_q)^{\theta_q} \\ &= \prod_{q\in Q_0} \prod_{n\in\mathbb{Z}} t^{n \dim(V_q^{(n)})} \end{aligned}$$

car, par définition, pour tout $q \in Q_0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma(t)_{q|V_q^{(n)}} = \begin{pmatrix} t^n & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t^n \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} \chi_\theta(\gamma(t)) &= \prod_{q\in Q_0} (t^{\sum_{n\in\mathbb{Z}} n \dim(V_q^{(n)})})^{\theta_q} \\ &= t^{\sum_{q\in Q_0} \theta_q \sum_{n\in\mathbb{Z}} n \dim(V_q^{(n)})} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} < \chi_\theta, \gamma > &= \sum_{q\in Q_0} \theta_q \sum_{n\in\mathbb{Z}} n \dim(V_q^{(n)}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} n \sum_{q\in Q_0} \theta_q \dim\left(V_q^{(\geq n)}/V_q^{(\geq n+1)}\right) \end{aligned}$$

d'après 4.7. Donc

$$\begin{aligned} <\chi_\theta,\gamma> &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\theta\left(V_n/V_{n+1}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(V_n) \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue par télescopage. ✠

Remarque. La formule 4.8 requière que $\theta(V_n)=0$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ sauf un nombre fini.

Théorème 4.2.4. *Soit $Q=(Q_0,Q_1,\alpha,\beta)$ un carquois et $\delta=(\delta_q)_{q\in Q_0}$ un tuple d'entiers naturels. Un point de $\mathcal{R}(Q,\delta)$ correspondant à une représentation de carquois $V=(V_q,\phi_s)_{(q,s)\in Q_0\times Q_1}$ de vecteur dimension δ est χ_θ-semi-stable si, et seulement si, V est θ-semi-stable.*

Démonstration.

$\Longleftarrow$ Supposons que V soit θ-semi-stable. Comme les sous-représentations $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de V sont propres, alors par définition $\theta(V_n)\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. D'où, par la formule 4.8 et le critère de Hilbert-Mumford la χ_θ-semi-stabilité de V.

$\Longrightarrow$ Supposons que V soit χ_θ-semi-stable. Une sous-représentation propre $W=(W_q,\phi_{|W_{\beta(s)}})$ de V induit une $\mathbb{Z}$-filtration avec $V_{n_0}=W$ pour un certain $n_0\in\mathbb{Z}$ fixé et $V_n=V$ pour tout $n\neq n_0$. Pour le sous-groupe à 1-paramètre γ correspondant à cette filtration, on a par la formule 4.8,

$$<\chi_\theta,\gamma>=\theta(W).$$

Enfin, le critère de Hilbert-Mumford permet de montrer que $\theta(W)\geq 0$ et donc la θ-semi-stabilité de V.

✠

Bibliographie

[1] Derksen, H., and Kemper, G. *Computational Invariant Theory.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.

[2] Hesselink, W. H. Uniform instability in reductive groups. *J. Reine Angrew. Math. 304* (1978), 74 – 96.

[3] Hoskins, V. Geometric invariant theory and symplectic quotients. *Zurich, Winter Semester* (2012).

[4] Hoskins, V. Stratifications associated to reductive group actions on affine spaces. *Quaterly Journal of Mathematics 3*, 65 (2014), 1011–1047.

[5] Hoskins, V. Moduli problems and geometric invariant theory. *Freie Universität Berlin* (2015).

[6] Humphreys, J. E. *Linear Algebraic Groups.* Graduate Texts in Mathematics, 1975.

[7] Kempf, G. R. Instability in invariant theory. *Annals of Mathematics 108*, 2 (1978), 299–316.

[8] King, A. D. Moduli of representations of finite dimensional algebras. *Quart. J. Math. Oxford 45* (1994), 515–530.

[9] Makisumi, S. Structure theory of reductive groups through examples. *Annals of Mathematics* (2011).

[10] Mathew, A. The CRing project.

[11] Mumford, D. *Geometric Invariant Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[12] Schmitt, A. H. W. *Geometric Invariant Theory and Decorated Principal Bundles.* European Methematical Society, 2008.

[13] Tauvel, P., and Yu, R. W. T. *Lie Algebras and Algebraic Groups.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.